

# DEFORMACIJSKA ANALIZA V GEODETSKIH MREŽAH Z ROBUSTNIMI METODAMI

# DEFORMATION ANALYSIS WITH ROBUST METHODS IN GEODETIC NETS

*Tomaž Ambrožič, Admir Mulahusić, Nedim Tuno, Jusuf Topoljak, Amir Hajdar, Dušan Kogoj*

UDK: 528.4  
Klasifikacija prispevka po COBISS.SI: 1.01  
Prispelo: 1. 2. 2019  
Sprejeto: 22. 4. 2019

DOI: 10.15292/geodetski-vestnik.2019.02.163-178  
SCIENTIFIC ARTICLE  
Received: 1. 2. 2019  
Accepted: 22. 4. 2019

## IZVLEČEK

*V članku je opisan postopek deformacijske analize v geodetskih mrežah z robustnimi metodami. Značilnost tega postopka je iterativno prilagajanje uteži in transformacija  $S$ , tako da se vektor premikov  $\mathbf{d}$  transformira v datum, ki ga določajo točke z manjšo koordinatno razliko med dvema terminskima izmerama. V članku je najprej podano teoretično ozadje postopka, nato je postopek uporabljen na primeru simuliranih meritev v dveh terminskih izmerah. Izračunani rezultati postopka deformacijske analize z robustnimi metodami na obravnavanem primeru se ne razlikujejo bistveno od rezultatov, pridobljenih s klasičnimi postopki deformacijske analize.*

## ABSTRACT

*This article describes the deformation analysis approach with robust methods in geodetic networks. The characteristic of this approach is the iterative weighted similarity transformation in which the displacement vector  $\mathbf{d}$  is transformed into a datum determined by points with a smaller coordinate difference between two epochs. The article first gives a theoretical background of the approach, and then the approach is applied to the case of simulated measurements in two epochs. The calculated results of the deformation analysis approach with the robust methods in the present case do not differ significantly from the results obtained by conventional deformation analysis approaches.*

## KLJUČNE BESEDE

deformacijska analiza, robustne metode, računski primer

## KEY WORDS

deformation analysis, robust methods, numerical example

## 1 UVOD

Z metodami deformacijske analize lahko na podlagi geodetskih meritev, ki jih opravimo na točkah geodetske mreže v različnih časovnih trenutkih, ugotavljamo stabilnost referenčnih točk v geodetski mreži in določamo premike kontrolnih točk na objektih (Bogatin in Kogoj, 2006). Metode deformacijske analize razdelimo (Welsch in Heunecke, 2001) na:

- metode, v katerih so premiki in deformacije uporabljeni kot funkcije časa, ali pa čas ni modeliran,
- metode, v katerih so premiki in deformacije uporabljeni kot funkcije vzročnih sil, ali pa vzročne sile niso modelirane,
- metode, ko je stanje objekta v ravnovesju, ali nenehno v gibanju,
- opisne (deskriptivne) oziroma vzročne (kavzalne) modele.

Testiranje statistično značilnih premikov v metodah deformacijske analize obravnavamo s klasičnimi postopki in tudi z robustnimi postopki deformacijske analize (Savšek, 2017).

## 2 TEORETIČNO OZADJE

Deformacijsko analizo z robustnimi metodami razdelimo na šest korakov (Lim in Setan, 2014; Ogundare, 2016), ki jih podrobneje opišemo v podpoglavjih v nadaljevanju.

### 2.1 Izravnava meritev vsake posamezne terminske izmere posebej kot proste mreže in odkrivanje morebitnih grobo pogrešenih meritev

Podobno kot pri drugih metodah deformacijske analize lahko med seboj primerjamo le terminske izmere, ki se po natančnosti meritev ne razlikujejo statistično značilno ter imajo usklajeno natančnost kotnih in dolžinskih meritev (Ambrožič, 2004). Med meritvami v posamezni terminski izmeri ne sme biti grobo pogrešenih, zato jih poiščemo in izločimo. Za iskanje in izločitev uporabimo enega izmed splošno znanih postopkov (Caspary, 1988; Grigillo in Stopar, 2003). Za deformacijsko analizo v geodetskih mrežah z robustnimi metodami moramo uporabiti rezultate izravnave meritev posamezne terminske izmere kot proste mreže, saj pred deformacijsko analizo ne vemo, katera referenčna točka je stabilna in katera ne (Chen et al., 1990). Orientacijske neznanke in morebitno neznanke faktorja merila mreže moramo v enačbah popravkov odstraniti z eno od metod redukcije neznanek (Van Mierlo, 1978).

### 2.2 Transformacija terminskih izmer v isti geodetski datum z uporabo transformacije S

Če se v geodetski mreži število točk v eni terminski izmeri razlikuje od števila v drugi terminski izmeri, ali je v obravnavanih terminskih izmerah različen geodetski datum (ker smo na primer v eni izmeri merili samo smeri, v drugi pa dolžine in smeri), moramo koordinatne neznanke neidentičnih točk izločiti oziroma geodetski datum uskladiti. To lahko naredimo s transformacijo S, ki je dobro opisana v literaturi (Van Mierlo, 1978; Caspary, 1988; Marjetič in Stopar, 2007). Po tem koraku lahko primerjamo koordinate točk različnih terminskih izmer med seboj, saj se vse točke nanašajo na isti geodetski datum.

### 2.3 Testiranje homogenosti natančnosti meritev obravnavanih izmer

Testiranje homogenosti natančnosti meritev obravnavanih izmer naredimo s testiranjem hipoteze o homogenosti natančnosti meritev v dveh izmerah, kar je mnogokrat opisano v literaturi (Chrzanowski

et al., 1986; Mihailović in Aleksić, 1994; Ambrožič, 2001). Po testiranju izračunamo novo oceno za referenčno varianco a posteriori  $\hat{\sigma}^2$  in skupno število nadštevilnih meritev v dveh izmerah  $f$  (Ambrožič, 2001 – enačba (4); Mihailović in Aleksić, 1994 – enačba (5.2.5); Chrzanowski et al., 1986 – enačba (4.11); Frankić, 2012 – enačba(8)).

**2.4 Izračun vektorja premikov in pripadajoče kovariančne matrike premikov iz rezultatov izravnave obravnavanih izmer**

Po testiranju statistične homogenosti natančnosti meritev dveh obravnavanih med seboj mersko neodvisnih izmer izračunamo vektor premikov  $\mathbf{d}$  in pripadajočo kovariančno matriko premikov  $\mathbf{Q}_{dd}$  po mnogokrat zapisanih enačbah (Chen et al., 1990 – enačba (10); Vrečko in Ambrožič, 2013 – enačbi (1) in (4); Mihailović in Aleksić, 1994).

**2.5 Izračun vektorja premikov z uporabo iterativnega prilagajanja uteži s transformacijo S in izračun kovariančne matrike premikov**

Ker nestabilnih referenčnih točk geodetske mreže še nismo identificirali, se lahko izračunani premiki nanašajo na geodetski datum, ki ga določajo tudi te nestabilne referenčne točke, ali pa imamo lahko v obravnavanih terminskih izmerah različen geodetski datum. Težavo rešimo z metodo iterativnega prilagajanja uteži s transformacijo S (angl. *Method of Iterative Weighted Similarity Transformation* ali na kratko IWST), ki jo je predlagal Chen, 1983. Drugi raziskovalci (Pardoe et al., 2018, ali Berné Valero in Beselga, 2005) metodo imenujejo IRLS (angl. *Iteratively Reweighted Least Squares*).

Metoda iterativnega prilagajanja uteži s transformacijo S temelji na tem, da transformiramo vektor premikov  $\mathbf{d}$  v datum, ki ga določajo točke z manjšo koordinatno razliko med dvema terminskima izmerama. Manjšim koordinatnim razlikam med dvema terminskima izmerama tako dodelimo večjo utež, večjim koordinatnim razlikam pa manjšo utež (Vrečko in Ambrožič, 2013).

Če torej v transformaciji S obravnavamo nestabilne referenčne točke kot grobo pogrešene meritve, lahko z robustnimi (statističnimi) metodami, ki v splošnem zmanjšajo ali celo eliminirajo vpliv grobo pogrešenih meritev, rešimo problem določitve geodetskega datuma. Geodetski datum določimo z oceno M, ki je posplošena metoda največjega verjetja (angl. *Maximum Likelihood Estimation*) (Marjetič in Kregar, 2016). Teoretično s tem postopkom določimo datum, ki minimizira prvo normo končne projekcije vektorja premikov (Chen, 1983; Setan in Singh, 2001; Vrečko in Ambrožič, 2013; Amiri-Simkooei et al., 2017).

Postopek je modifikacija transformacije S (Marjetič in Stopar, 2007). V klasični transformaciji S imamo v matriki  $\mathbf{E}_p$ , kot sta jo označila Marjetič in Stopar, 2007, v enačbi (31) vrednosti na diagonalni le 0 ali 1. V metodi iterativnega prilagajanja uteži pa matriko  $\mathbf{E}_p$  zamenjamo z matriko uteži  $\mathbf{W}^{(it)}$ , vrednosti njenih elementov na diagonalni določimo z iteracijskim postopkom. Vektor premikov točk  $\mathbf{d}$  in pripadajočo kovariančno matriko premikov  $\mathbf{Q}_{dd}$  izračunamo:

$$\mathbf{d}^{(it)} = \mathbf{S}^{(it)} \mathbf{d}, \tag{1}$$

$$\mathbf{Q}_{dd}^{(it)} = \mathbf{S}^{(it)} \mathbf{Q}_{dd} (\mathbf{S}^{(it)})^T, \tag{2}$$

kjer so:

$\mathbf{S}^{(it)} = \mathbf{I} - \mathbf{H}(\mathbf{H}^T \mathbf{W}^{(it)} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{W}^{(it)}$  ... matrika transformacije  $\mathbf{S}$  velikosti  $2m \times 2m$  ( $m$  je število točk v geodetski mreži),

$$(3)$$

$\mathbf{H}$  ... datumska matrika velikosti  $2m \times d$  ( $d$  je defekt datuma) – (Marjetič in Stopar, 2007 – enačba (13); Marjetič et al., 2012),

$\mathbf{W}^{(it)} = \text{diag}(\omega_i^{(it)})$  ... matrika uteži velikosti  $2m \times 2m$ ,

$$(4)$$

$\omega_i^{(it)}$  ... vrednost utežne funkcije, njen izračun podajamo v nadaljevanju ( $i=1 \dots 2m$ ),

( $it$ ) ... iteracijski korak.

Na začetku privzamemo, da je matrika uteži enaka enotski matriki:

$$\mathbf{W}^{(it=0)} = \mathbf{I} \text{ oz. } \omega_i^{(it=0)} = 1, i = 1 \dots 2m, \quad (5)$$

torej vse točke v enaki meri določajo datum mreže. Ta rešitev je popolnoma enaka rešitvi, ki bi jo dobili po transformaciji  $\mathbf{S}$  v prosto geodetsko mrežo (Caspary, 1988). Na začetku uporabimo vektor komponent premikov točk  $\mathbf{d}$  (izračunan v podpoglavju 2.4):  $\mathbf{d}^{(it=0)} = \mathbf{d}$ . Nato v naslednjih iteracijah izračunamo vektor komponent premikov točk

$$\mathbf{d}^{(it+1)} = \mathbf{S}^{(it+1)} \mathbf{d}^{(it)} \quad (6)$$

tako, da v matriki transformacije  $\mathbf{S}$

$$\mathbf{S}^{(it+1)} = \mathbf{I} - \mathbf{H}(\mathbf{H}^T \mathbf{W}^{(it+1)} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{W}^{(it+1)} \quad (7)$$

uporabimo z različnimi ocenami  $\mathbf{M}$  izračunane matrike uteži  $\mathbf{W}^{(it+1)}$ . Vrednosti elementov na diagonali matrike uteži (4) torej izračunamo z različnimi utežnimi funkcijami. Poznamo mnogo različnih utežnih funkcij, izbrane smo za 2D-geodetske mreže uporabili v naši raziskavi. Podajamo jih v preglednici 1.

Števce iteracijskih korakov oziroma ponovitev ( $it$ ) gre od nič do vrednosti, ki jo dobimo, ko je izpolnjen pogoj, da je največja razlika komponent vektorja premika  $|\mathbf{d}^{(it+1)} - \mathbf{d}^{(it)}|$  manjša od izbrane meje prekinitve iteracijskega procesa  $\delta$  (Setan in Singh, 2001; Taşçı, 2008; Sušić et al., 2017):

$$\max. (|\mathbf{d}^{(it+1)} - \mathbf{d}^{(it)}|) < \delta. \quad (8)$$

Preglednica 1: Utežne funkcije. V enačbah je  $d_i^{(it)}$  komponenta vektorja premika točke  $i$ , torej ali  $dy_i^{(it)}$ , ali  $dx_i^{(it)}$ , enačba (1 oziroma 6),  $\sigma_{\sigma_i}$  pa standardna deviacija komponente premika točke  $i$ , torej ali  $\sigma_{dy_i}$ , ali  $\sigma_{dx_i}$ , ki je diagonalni element matrike kofaktorjev koordinatnih neznank, enačba (2).  $s_i^{(it)}$  je dolžina vektorja premika, računana po enačbi (11),  $\sigma_{s_i}$  je standardna deviacija premika točke  $i$ , računana po enačbi (12).

Utežna funkcija	Ocena za komponente vektorja premika točke $i$	Ocena za premik točke $i$
ocena $L_1$	$\omega_i^{(it+1)} = \frac{1}{ d_i^{(it)} }$	$\omega_i^{(it+1)} = \frac{1}{ s_i^{(it)} }$
ocena $L_1-L_2$	$\omega_i^{(it+1)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(d_i^{(it)})^2}{2}}}$	$\omega_i^{(it+1)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(s_i^{(it)})^2}{2}}}$
ocena $L_p$	$\omega_i^{(it+1)} =  d_i^{(it)} ^{p-2}, p = 1, 2$	$\omega_i^{(it+1)} =  s_i^{(it)} ^{p-2}$

Utežna funkcija	Ocena za komponente vektorja premika točke $i$	Ocena za premik točke $i$
Huberjeva ocena	$\omega_i^{(i+1)} = \begin{cases} 1 & \text{če je }  d_i^{(i)}  \leq q_i \\ \frac{q_i}{ d_i^{(i)} } & \text{če je }  d_i^{(i)}  > q_i \end{cases}, q_i = c\sigma_{d_i}$	$\omega_i^{(i+1)} = \begin{cases} 1 & \text{če je }  s_i^{(i)}  \leq q_i \\ \frac{q_i}{ s_i^{(i)} } & \text{če je }  s_i^{(i)}  > q_i \end{cases}, q_i = c\sigma_{s_i}$
modificirana Huberjeva ocena	$\omega_i^{(i+1)} = \begin{cases} \frac{q_i}{ d_i^{(i)} } \sin\left(\frac{ d_i^{(i)} }{q_i}\right) & \text{če je } \frac{ d_i^{(i)} }{q_i} \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{q_i}{ d_i^{(i)} } & \text{če je } \frac{ d_i^{(i)} }{q_i} > \frac{\pi}{2} \end{cases}, q_i = c\sigma_{d_i}$	$\omega_i^{(i+1)} = \begin{cases} \frac{q_i}{ s_i^{(i)} } \sin\left(\frac{ s_i^{(i)} }{q_i}\right) & \text{če je } \frac{ s_i^{(i)} }{q_i} \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{q_i}{ s_i^{(i)} } & \text{če je } \frac{ s_i^{(i)} }{q_i} > \frac{\pi}{2} \end{cases}, q_i = c\sigma_{s_i}$
Fairova ocena	$\omega_i^{(i+1)} = \frac{1}{1 + \frac{ d_i^{(i)} }{q_i}}, q_i = c\sigma_{d_i}$	$\omega_i^{(i+1)} = \frac{1}{1 + \frac{ s_i^{(i)} }{q_i}}, q_i = c\sigma_{s_i}$
Chauchyjeva ocena	$\omega_i^{(i+1)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{ d_i^{(i)} }{q_i}\right)^2}, q_i = c\sigma_{d_i}$	$\omega_i^{(i+1)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{ s_i^{(i)} }{q_i}\right)^2}, q_i = c\sigma_{s_i}$
Welscheva ocena	$\omega_i^{(i+1)} = \exp\left(-\left(\frac{ d_i^{(i)} }{q_i}\right)^2\right), q_i = c\sigma_{d_i}$	$\omega_i^{(i+1)} = \exp\left(-\left(\frac{ s_i^{(i)} }{q_i}\right)^2\right), q_i = c\sigma_{s_i}$
Tukeyjeva ocena	$\omega_i^{(i+1)} = \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{ d_i^{(i)} }{q_i}\right)^2\right)^2 & \text{če je }  d_i^{(i)}  \leq q_i \\ 0 & \text{če je }  d_i^{(i)}  > q_i \end{cases}, q_i = c\sigma_{d_i}$	$\omega_i^{(i+1)} = \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{ s_i^{(i)} }{q_i}\right)^2\right)^2 & \text{če je }  s_i^{(i)}  \leq q_i \\ 0 & \text{če je }  s_i^{(i)}  > q_i \end{cases}, q_i = c\sigma_{s_i}$
German-McClurejeva ocena	$\omega_i^{(i+1)} = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{ d_i^{(i)} }{q_i}\right)^2\right)^2}$	$\omega_i^{(i+1)} = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{ s_i^{(i)} }{q_i}\right)^2\right)^2}$
Hampelova ocena	$\omega_i^{(i+1)} = \begin{cases} 1 & \text{če je } 0 <  d_i^{(i)}  \leq q_i \\ \frac{q_i}{ d_i^{(i)} } & \text{če je } q_i <  d_i^{(i)}  \leq u_i \\ \frac{q_i (v_i -  d_i^{(i)} )}{ d_i^{(i)}  (v_i - u_i)} & \text{če je } u_i <  d_i^{(i)}  \leq v_i \\ 0 & \text{če je }  d_i^{(i)}  > v_i \end{cases},$ $q_i = a\sigma_{d_i}, u_i = b\sigma_{d_i}, v_i = c\sigma_{d_i}$	$\omega_i^{(i+1)} = \begin{cases} 1 & \text{če je } 0 <  s_i^{(i)}  \leq q_i \\ \frac{q_i}{ s_i^{(i)} } & \text{če je } q_i <  s_i^{(i)}  \leq u_i \\ \frac{q_i (v_i -  s_i^{(i)} )}{ s_i^{(i)}  (v_i - u_i)} & \text{če je } u_i <  s_i^{(i)}  \leq v_i \\ 0 & \text{če je }  s_i^{(i)}  > v_i \end{cases},$ $q_i = a\sigma_{s_i}, u_i = b\sigma_{s_i}, v_i = c\sigma_{s_i}$
danska ocena	$\omega_i^{(i+1)} = \begin{cases} 1 & \text{če je }  d_i^{(i)}  \leq q_i \\ \exp\left(-\left(\frac{ d_i^{(i)} }{q_i}\right)^2\right) & \text{če je }  d_i^{(i)}  > q_i \end{cases}, q_i = c\sigma_{d_i}$	$\omega_i^{(i+1)} = \begin{cases} 1 & \text{če je }  s_i^{(i)}  \leq q_i \\ \exp\left(-\left(\frac{ s_i^{(i)} }{q_i}\right)^2\right) & \text{če je }  s_i^{(i)}  > q_i \end{cases}, q_i = c\sigma_{s_i}$

Ocena  $L_1$  minimizira prvo normo vektorja komponent premika  $\mathbf{d}_1 = \sum_{i=1}^{2m} |d_i^{(i)}| = \min$ , ta ocena zmanjša

vpliv grobo pogrešenih meritev. Prvi jo je uporabil avtor postopka Chen (1983) in več drugih avtorjev (Setan in Singh, 2001; Taşçi, 2008; Pennacchi, 2008; Erenoglu, 2018). Rešitev nedoločnosti v  $d_i^{(i)} = 0$  opisujemo v nadaljevanju, glej enačbi (9a) in (10).

Ocena  $L_1$ – $L_2$  ohranja prednosti ocen  $L_1$  (zmanjša vpliv grobo pogrešenih meritev) in  $L_2$  (rešitev je enolična), za majhne  $d_i^{(it)}$  se obnaša kot  $L_2$ , za večje pa kot  $L_1$  (Pennacchi, 2008).

Raziskovalci predlagajo v oceni  $L_p$  (Pennacchi, 2008) vrednost eksponenta  $\nu = 1,2$ , saj s takšno izbiro ohranimo robustnost ocene (na oceno grobo pogrešene meritve malo vplivajo), težavo predstavlja nedoločeno v  $d_i^{(it)} = 0$  – rešitev te težave opisujemo v nadaljevanju, glej enačbi (9b) in (10).

Za izračun Huberjeve ocene lahko uporabimo za  $c = 1,3450$  (Pennacchi, 2008; Banaš, 2017; Pardoe et al., 2018), drugi avtorji (Nowel, 2015; Gašinec in Gašincová, 2016; Hassan, 2016; Sušić et al., 2017; Erenoglu, 2018) pa predlagajo vrednosti za  $c$  med 1,5 in 2.

Prav tako lahko za izračun modificirane Huberjeve ocene uporabimo za  $c = 1,2107$  (Pennacchi, 2008), drugi avtorji, ki jo imenujejo Andrewsova ocena, pa predlagajo  $c = 1,5 * 2$  (Andrews, 1974; Erenoglu, 2018) ali  $c = 1,339 * 2$  (Pardoe et al., 2018), težavo pa predstavlja nedoločeno v  $d_i^{(it)} = 0$  – rešitev te težave opisujemo v nadaljevanju, glej enačbi (9c) in (10).

Za izračun Fairrove ocene uporabimo za  $c = 1,3998$  (Pennacchi, 2008), za izračun Chauchyjeve ocene uporabimo za  $c = 2,3849$ , za izračun Welscheve ocena uporabimo za  $c = 2,9846$  (Pennacchi, 2008; Gašinec in Gašincová, 2016), za izračun Tukeyjeve ocene uporabimo za  $c = 4,6851$  (Pennacchi, 2008) – to oceno imenujejo tudi Beaton-Tukeyjeva ocena (Sisman, 2010).

V izračunu German-McClurejeve ocene ne nastopa parameter  $c$  (Pennacchi, 2008).

Za izračun Hampelove ocene uporabimo za  $a = 1,5$ ,  $b = 3$  in  $c = 6$  oziroma  $a = 0,8$ ,  $b = 1,6$  in  $c = 3,2$  (Erenoglu, 2018),  $a = 1,7$ ,  $b = 3,4$  in  $c = 8,5$  (Banaš, 2017) ali  $a = 2$ ,  $b = 4$  in  $c = 8$  (Labant et al., 2011), za izračun danske ocene uporabimo za  $c = 3$  (Erenoglu, 2018), drugi predlagajo  $c = 2$  (Hassan, 2016). Opozoriti moramo, da je v izračunu danske ocene, katere avtor je prof. Krarup, v kar nekaj člankih napaka (Hassan, 2016; Erenoglu, 2018) – ulomek v eksponentu je treba kvadrirati!

Težavo v izračunu ocen  $L_1$ ,  $L_p$  in modificirane Huberjeve ocene v točki nedoločeno v  $d_i^{(it)} = 0$  rešimo tako, da vrednost utežne funkcije izračunamo v njeni bližini, (Chen, 1983; Setan in Singh, 2001; Tašči, 2008; Sušić et al., 2017).

$$\omega_i^{(it+1)} = \frac{1}{|d_i^{(it)}| + \varepsilon} \dots \text{ocena } L_1 \text{ za komponente vektorja premika točke } i, \quad (9a)$$

$$\omega_i^{(it+1)} = |d_i^{(it)} + \varepsilon|^{\nu-2} \dots \text{ocena } L_p \text{ za komponente vektorja premika točke } i, \quad (9b)$$

$$\omega_i^{(it+1)} = \begin{cases} \frac{q_i}{|d_i^{(it)}| + \varepsilon} \sin\left(\frac{|d_i^{(it)}|}{q_i}\right) & \text{če je } \frac{|d_i^{(it)}|}{q_i} \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{q_i}{|d_i^{(it)}|} & \text{če je } \frac{|d_i^{(it)}|}{q_i} > \frac{\pi}{2} \end{cases} \dots \text{modificirana Huberjeva ocena za komponente vektorja premika točke } i, \quad (9c)$$

kjer je:

$\varepsilon$  ... izbrana majhna vrednost,

ali kar zapišemo, da je na primer

$$\omega_i^{(it+1)} = 10^9, \quad (10)$$

in ne  $\omega_i^{(it+1)} = 0$ , kot je zapisano v Chen, 1983; Chrzanowski et al., 1986; Chen et al., 1990, saj:

- ni v skladu z osnovnim konceptom metode iterativnega prilaganja uteži s transformacijo  $S$  (manjšim koordinatnim razlikam med dvema terminskima izmerama dodelimo večjo utež, večjim koordinatnim razlikam pa manjšo utež),
- ni logično, da v točki nedoločenosti  $d_i^{(it)}=0$ , to je v točki, ki ni spremenila položaja (to je torej stabilna referenčna točka), dodelimo vrednost utežne funkcije  $\omega_i^{(it+1)} = 0$ ,
- izračunamo popolnoma drugačne vrednosti, kot če uporabimo enačbe (9),
- se rezultati, ki jih prikazujejo v tretjem poglavju, razlikujejo od pričakovanih (izračunanih z enačbami 9), če uporabimo  $\omega_i^{(it+1)} = 0$ .

Po končanem iteracijskem procesu imamo na diagonali matrike  $\mathbf{W}$ , enačba (4), elemente blizu 1 oziroma 1 na tistih mestih, ki se nanašajo na komponente vektorja premika točke, ki se niso statistično spremenile (stabilne komponente), in elemente blizu 0 oziroma 0 na mestih, kjer se nanašajo na komponente vektorja premika točke, ki so se statistično spremenile, če vrednosti utežnih funkcij izračunamo z ocenami po enačbah v preglednici 1. Izjema sta oceni  $L_1, L_p$  in modificirana Huberjeva ocena, ko v točki nedoločenosti  $d_i^{(it)} = 0$  ne moremo izračunati uteži, rešitev podajamo z enačbo (9) ali (10). Na koncu iteracijskega procesa zavzame števec iteracijskih korakov vrednost ( $it = kon$ ). Če v enačbah za izračun premikov  $\mathbf{d}$  (izračunan v podpoglavju 2.4) in pripadajočo kovariančno matriko premikov  $\mathbf{Q}_{dd}$  (izračunana v podpoglavju 2.4) obravnavamo tudi kontrolne točke na objektu (nedatumske točke), imamo na diagonali matrike  $\mathbf{W}$  elemente z vrednostmi 0 na tistih mestih, ki se nanašajo na komponente vektorja premika teh točk (Nowel, 2015; Sušić et al., 2017), saj te točke obravnavamo kot nestabilne.

Ker so komponente vektorja premikov odvisne od orientacije koordinatnega sistema, ki je določen s približnimi koordinatami, nekateri avtorji (Caspary, 1988; Caspary et al., 1990; Nowel, 2015; Nowel, 2016) predlagajo za izračun utežne funkcije namesto komponent vektorja premika točke  $i$  uporabo premika točke  $s_i$ :

$$s_i = \sqrt{dy_i^2 + dx_i^2}, \tag{11}$$

ki je neodvisen od orientacije koordinatnega sistema s standardno deviacijo oziroma varianco (Savšek-Safić et al., 2006; Nowel, 2015; Savšek, 2017):

$$\sigma_{s_i}^2 = \left(\frac{dy_i}{s_i}\right)^2 \sigma_{dy_i}^2 + 2 \frac{dy_i}{s_i} \frac{dx_i}{s_i} \sigma_{dy_i dx_i} + \left(\frac{dx_i}{s_i}\right)^2 \sigma_{dx_i}^2. \tag{12}$$

Tako lahko s premikom točke zapišemo v naši raziskavi uporabljene utežne funkcije, ki jih podajamo v preglednici 1. Ocena  $L_1$  za premik točke  $i$  zdaj minimizira prvo normo vektorja premika

$$\mathbf{d}_1 = \sum_{i=1}^m s_i^{(it)} = \sum_{i=1}^m \sqrt{(dy_i^{(it)})^2 + (dx_i^{(it)})^2} = \min. \text{ (Setan in Singh, 2001).} \tag{13}$$

Iteracijski proces prekinemo, ko je izpolnjen pogoj, da je največja razlika premikov točk med dvema iteracijskima korakoma  $|s_i^{(it+1)} - s_i^{(it)}|$  manjša od izbrane meje prekinitve iteracijskega procesa  $\delta$ .

Težavo v izračunu ocen  $L_1, L_p$  in modificirane Huberjeve ocene v točki nedoločenosti  $s_i^{(it)}=0$  lahko rešimo

na več načinov. Tako na primer v izračunu ocene  $L_1$  izračunamo vrednost utežne funkcije

$$\omega_i^{(it+1)} = \frac{1}{s_i^{(it)} + \varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{(dy_i^{(it)})^2 + (dx_i^{(it)})^2} + \varepsilon} \quad (\text{Sušić et al., 2017}) \quad \text{ali} \quad (14a)$$

$$\omega_i^{(it+1)} = \frac{1}{\sqrt{(dy_i^{(it)} + \varepsilon)^2 + (dx_i^{(it)} + \varepsilon)^2}} \quad (\text{Setan in Singh, 2001}) \quad \text{ali} \quad (14b)$$

$$\omega_i^{(it+1)} = 10^9 \quad (\text{glej enačbo 10}). \quad (14c)$$

Poudariti moramo, da sta oba elementa matrike uteži  $\mathbf{W}^{(it+1)}$ , ki ju izračunamo z utežnimi funkcijami iz desnega stolpca v preglednici 1 in se nanašata na točko  $i$ , enaka (Nowel, 2015).

Ko je izpolnjen pogoj v enačbi (8) in je iteracijski postopek prilagajanja uteži končan, izračunamo kovariančno matriko premikov

$$\mathbf{Q}_{dd}^{(it+1)} = \mathbf{S}^{(it+1)} \mathbf{Q}_{dd} (\mathbf{S}^{(it+1)})^T. \quad (15)$$

## 2.6 Testiranje stabilnosti posamezne točke geodetskem mreže in končna transformacija S

Po končanem iteracijskem postopku prilagajanja uteži opravimo testiranje stabilnosti komponent vektorja premika točke geodetske mreže. Testiranje opravimo za vse referenčne točke v geodetski mreži. Sestavimo ničelno in alternativno hipotezo:

$H_0: \mathbf{E}(\mathbf{d}^{(it+1)}) = 0 \dots$  ena komponenta vektorja premika točke v mreži se med dvema terminskima izmerama ni spremenila, če uporabljamo v izračunu enačbe iz srednjega stolpca v preglednici 1, oziroma obe komponenti vektorja premika točke v mreži se med dvema terminskima izmerama nista spremenili, če uporabljamo v izračunu enačbe iz desnega stolpca v preglednici 1 in (16)

$H_a: \mathbf{E}(\mathbf{d}^{(it+1)}) \neq 0 \dots$  mreža, opisana v  $H_0$ , je spremenila svojo geometrijo.

Sestavimo testno statistiko (Tašči, 2010; Nowel, 2015; Sušić et al., 2017):

$$T_i = \frac{(\mathbf{d}_i^{(it+1)})^T (\mathbf{Q}_{dd_i}^{(it+1)})^{-1} \mathbf{d}_i^{(it+1)}}{h_i \hat{\sigma}^2}, \quad (17)$$

kjer je:

$h_i = \text{rang}(\mathbf{Q}_{dd_i}^{(it+1)}) \dots$  število prostostnih stopenj – za 2D-mrežo je  $h_i = 1$ , če obravnavamo eno komponento vektorja premika točke in uporabljamo v izračunu enačbe iz srednjega stolpca v preglednici 1, oziroma  $h_i = 2$ , če obravnavamo obe komponenti vektorja premika točke in uporabljamo v izračunu enačbe iz desnega stolpca v preglednici 1.

Testna statistika se porazdeljuje po Fisherjevi porazdelitvi z izbrano stopnjo zaupanja  $1 - \alpha$ , z  $f$  in  $h_i$  prostostnimi stopnjami. Če je vrednost testne statistike manjša ali enaka kritični vrednosti  $T_i \leq F_{f, h_i, 1 - \alpha}$ , potem ničelne hipoteze  $H_0$  (16) ne moremo zavrnila in lahko trdimo z verjetnostjo  $1 - \alpha$ , da se komponenta vektorja premika točke v mreži med dvema terminskima izmerama ni statistično spremenila oziroma obe komponenti vektorja premika točke v mreži med dvema terminskima izmerama nista



statistično spremenili. Če je vrednost testne statistike večja od kritične vrednosti, potem ničelno hipotezo zavrnamo in lahko trdimo z verjetnostjo  $1 - \alpha$ , da se je komponenta vektorja premika točke med dvema terminskima izmerama spremenila oziroma obe komponenti vektorja premika točke med dvema terminskima izmerama spremenili in je mreža spremenila svojo geometrijo. Poudariti moramo, da lahko pri obravnavanju premika po komponentah ugotovimo, da se točka v mreži ni statistično značilno premaknila le, če se obe komponenti vektorja premika točke v mreži med dvema terminskima izmerama nista statistično spremenili.

Po testiranju stabilnosti posamezne točke naredimo končno transformacijo  $S$  tako, da v matriki uteži  $\mathbf{W}^{(it=kon)}$  postavimo na diagonali vrednosti 1 na tistih mestih, ki se nanašajo na komponente vektorja premika točke, ki se niso statistično spremenile, in vrednosti 0 na tistih mestih, ki se nanašajo na komponente vektorja premika točke, ki so se statistično spremenile, ter izračunamo

$$\mathbf{d}^{(it=kon)} = \mathbf{S}^{(it=kon)} \mathbf{d}^{(it+1)} \text{ in} \tag{18}$$

$$\mathbf{Q}_{dd}^{(it=kon)} = \mathbf{S}^{(it=kon)} \mathbf{Q}_{dd} (\mathbf{S}^{(it=kon)})^T, \tag{19}$$

kjer je:

$$\mathbf{S}^{(it=kon)} = \mathbf{I} - \mathbf{H}(\mathbf{H}^T \mathbf{W}^{(it=kon)} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{W}^{(it=kon)}.$$

Če obravnavamo obe komponenti vektorja premika točke hkrati, potem sta oba diagonalna elementa v matriki uteži, ki se nanašata na točko, ki se ni premaknila, enaka 1. To velja za vse elemente, ki se nanašajo na točke, ki se niso premaknile. Vsi drugi diagonalni elementi so enaki 0. Ti elementi se nanašajo na točke, ki so se premaknile, in na točke na objektu. Na koncu izvedemo testiranje stabilnosti posamezne točke po enačbi (17), le da uporabimo v izračunu vektor premika iz (18) in kovariančno matriko iz (19).

### 3 RAČUNSKI PRIMER

Učinkovitost deformacijske analize z robustnimi metodami prikazujemo na primeru iz literature (Mihailović in Aleksić, 1994), kjer so za obe terminski izmeri podani vhodni podatki za izravnavo in skica mreže. Isti primer smo obravnavali v vseh drugih postopkih deformacijske analize (Ambrožič, 2001; Ambrožič, 2004; Marjetič et al., 2012; Vrečko in Ambrožič, 2013; Soldo in Ambrožič, 2018), zato izravnanih koordinat ne podajamo. Pri vseh testih izberemo stopnjo značilnosti testa  $\alpha = 0,05$ .

V prvem koraku izravnavamo meritve vsake posamezne terminske izmere posebej kot prosti mreži. Grobih pogoškov med meritvami ni, saj uporabimo simulirane meritve. Tudi drugega koraka nam mi treba opraviti, saj imamo v obeh terminskih izmerah identične točke in se rezultati izravnave nanašajo na isti geodetski datum.

Po testiranju homogenosti natančnosti meritev obravnavanih izmer, kar je tretji korak deformacijske analize in je v celoti opisano v Ambrožič, 2001, izračunamo novo oceno za referenčno varianco a posteriori  $\hat{\sigma}^2 = 1,1387$ . Vsi podatki za izračun so zapisani v Ambrožič (2004) ali Soldo in Ambrožič (2018).

V četrtem koraku izračunamo vektor premikov  $\mathbf{d}$  in pripadajočo kovariančno matriko premikov  $\mathbf{Q}_{dd}$ .

Deformacijsko analizo nadaljujemo s petim korakom, to je z izračunom komponente vektorja premika  $\mathbf{d}$  z metodo iterativnega prilagajanja uteži s transformacijo  $S$ . Na začetku iterativnega procesa izračunamo matriko uteži po enačbi (5) in vektor premikov po enačbi (1). V naslednjih korakih izračunamo kom-

ponento vektorja premika po enačbi (6). Matriko transformacije S po enačbi (7) izračunamo z matriko uteži  $\mathbf{W}^{(i+1)}$ , njene elemente na diagonali izračunamo z utežnimi funkcijami z enačbami v preglednici 1. Iteracijski proces prekinemo, ko je izpolnjen pogoj (8). V vseh primerih izračunov komponent vektorja premikov z različnimi utežnimi funkcijami smo uporabili isto mejo prekinitve iteracijskega procesa  $\delta = 0,0001$  m. Po prekinitvi iteracijskega procesa izračunamo kovariančno matriko po enačbi (15) in izvedemo testiranje stabilnosti posamezne komponente vektorja premika točke geodetske mreže tako, da izračunamo testno statistiko po enačbi (17) in jo primerjamo s kritično vrednostjo, ki je v vseh primerih izračunov komponent premika z različnimi utežnimi funkcijami enaka  $F_{f, b_i, 1-\alpha} = 4,001$  ( $f = 60, b_i = 1$ ). V preglednici 2 prikazujemo rezultate po zadnji iteraciji ( $d_y, d_x$ ), zapišemo še dolžino vektorja premika točke, ki ga izračunamo po enačbi (11).

Preglednica 2: Izračunani premiki točk, če jih obravnavamo po komponentah premika točke, in izračunani premiki točk, če naenkrat izračunamo vektor premika za posamezno točko. Na obarvanem polju so zapisani statistično značilni premiki.

točka	premik (mm)	it <sub>kon</sub>	koordinatno skupino	simulirano		ocena L <sub>1</sub>		ocena L <sub>1</sub> - L <sub>2</sub>		ocena L <sub>p</sub> v = 1,2		Huberjeva ocena c = 1,3450		modificirana Huberjeva ocena c = 1,2107		Fairrova ocena c = 1,998		Chauchyjeva ocena c = 2,3849		Welscheva ocena c = 4,6851		Tukeyjeva ocena c = 4,6851		German-McClurejeva ocena		Hampeljeva ocena a = 1,5 b = 3 c = 6		danska ocena c = 3		končno			
				dy/dx	s	dy/dx	s	dy/dx	s	dy/dx	s	dy/dx	s	dy/dx	s	dy/dx	s	dy/dx	s	dy/dx	s	dy/dx	s	dy/dx	s	dy/dx	s	dy/dx	s		dy/dx	s	
1	dy	-20.0	-18.4	-10.8	-14.6	-14.5	-14.4	-11.6	-17.5	-19.4	-19.4	-10.8	-19.4	-19.4	-10.8	-19.4	-19.4	-10.8	-19.4	-19.4	-10.8	-19.4	-19.4	-10.8	-19.4	-19.4	-10.8	-19.4	-19.4	-10.8	-19.4	-19.4	
	dx	-34.6	-38.1	-44.1	-37.0	-37.7	-37.6	-37.5	-37.7	-37.6	-37.5	-37.7	-37.6	-37.5	-37.7	-37.6	-37.5	-37.7	-37.6	-37.5	-37.7	-37.6	-37.5	-37.7	-37.6	-37.5	-37.7	-37.6	-37.5	-37.7	-37.6	-37.5	
	s	40.0	42.3	42.9	45.4	45.4	39.8	41.8	40.4	41.1	40.3	41.3	39.3	40.6	41.5	41.9	42.3	42.3	42.3	42.3	42.3	42.3	42.3	42.3	42.3	42.3	42.3	42.3	42.3	42.3	42.3	42.3	
2	dy	-30.0	-37.1	-29.5	-33.3	-33.2	-33.1	-30.3	-36.2	-38.1	-38.1	-29.5	-38.1	-38.1	-29.5	-38.1	-38.1	-29.5	-38.1	-38.1	-29.5	-38.1	-38.1	-29.5	-38.1	-38.1	-29.5	-38.1	-38.1	-29.5	-38.1	-38.1	
	dx	52.0	50.0	51.8	53.7	53.0	53.1	55.3	50.7	49.4	49.4	51.8	49.5	49.5	51.8	49.5	49.5	51.8	49.5	49.5	51.8	49.5	49.5	51.8	49.5	49.5	51.8	49.5	49.5	51.8	49.5	49.5	
	s	60.0	62.3	62.0	59.6	63.2	62.5	62.3	61.1	62.6	62.3	62.4	61.1	62.6	62.3	62.4	62.4	62.4	62.4	62.4	62.4	62.4	62.4	62.4	62.4	62.4	62.4	62.4	62.4	62.4	62.4	62.4	62.5
3	dy	25.0	21.4	22.0	22.9	23.0	23.0	24.0	22.0	21.4	21.4	22.0	21.4	21.4	22.0	21.4	21.4	22.0	21.4	21.4	22.0	21.4	21.4	22.0	21.4	21.4	22.0	21.4	21.4	22.0	21.4	21.4	
	dx	-43.3	-42.2	-35.8	-37.1	-37.7	-37.6	-34.1	-41.4	-43.5	-43.5	-35.8	-43.5	-43.5	-35.8	-43.5	-43.5	-35.8	-43.5	-43.5	-35.8	-43.5	-43.5	-35.8	-43.5	-43.5	-35.8	-43.5	-43.5	-35.8	-43.5	-43.5	
	s	50.0	47.3	48.3	42.0	42.0	43.6	46.4	44.2	46.6	44.1	46.5	41.7	45.0	46.9	47.8	48.5	48.5	48.5	48.5	48.5	42.0	42.0	48.5	48.5	42.0	42.0	48.5	48.5	48.5	48.5	48.5	48.5
4	dy	0.0	0.0	-4.0	0.0	0.1	0.1	-0.2	0.5	0.7	0.7	-4.0	0.7	0.7	-4.0	0.7	0.7	-4.0	0.7	0.7	-4.0	0.7	0.7	-4.0	0.7	0.7	-4.0	0.7	0.7	-4.0	0.7	0.7	
	dx	0.0	1.8	5.1	5.9	5.2	5.4	8.0	2.5	2.5	2.5	0.9	2.5	2.5	0.9	2.5	2.5	0.9	2.5	2.5	0.9	2.5	2.5	0.9	2.5	2.5	0.9	2.5	2.5	0.9	2.5	2.5	
	s	0.0	1.8	0.8	6.5	6.5	5.9	2.7	5.2	2.9	5.4	3.0	8.0	4.5	2.6	1.8	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	6.5	6.5	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2
5	dy	0.0	-1.6	-6.4	-1.9	-1.8	-1.8	-2.3	-1.1	-0.8	-0.8	-1.6	-0.8	-0.8	-1.1	-0.8	-0.8	-1.1	-0.8	-0.8	-1.1	-0.8	-0.8	-1.1	-0.8	-0.8	-1.1	-0.8	-0.8	-1.1	-0.8	-0.8	
	dx	0.0	-2.7	-7.1	-1.1	-1.8	-1.7	-1.1	-2.2	-2.3	-2.3	-2.3	-2.3	-2.3	-2.3	-2.3	-2.3	-2.3	-2.3	-2.3	-2.3	-2.3	-2.3	-2.3	-2.3	-2.3	-2.3	-2.3	-2.3	-2.3	-2.3	-2.3	
	s	0.0	3.1	3.4	9.6	9.6	2.2	2.9	2.5	2.4	2.4	2.3	2.6	2.3	2.5	2.3	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	9.6	9.5	2.4	2.4	2.4	2.4	2.4	2.4	2.4	2.4	2.4	2.4
6	dy	0.0	0.4	3.3	2.6	2.7	2.8	4.4	1.1	1.1	1.1	0.0	1.1	1.1	0.0	1.1	1.1	0.0	1.1	1.1	0.0	1.1	1.1	0.0	1.1	1.1	0.0	1.1	1.1	0.0	1.1	1.1	
	dx	0.0	0.0	-10.6	-0.4	-1.1	-1.0	-2.2	0.3	1.3	1.3	-10.6	1.3	1.3	-10.6	1.3	1.3	-10.6	1.3	1.3	-10.6	1.3	1.3	-10.6	1.3	1.3	-10.6	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	
	s	0.0	0.4	0.0	11.1	11.1	2.6	0.8	2.9	1.4	2.9	1.4	1.1	1.1	1.1	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	11.1	11.0	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3
7	dy	25.0	24.1	25.5	25.8	25.9	26.0	27.2	24.8	24.0	24.0	25.5	24.0	24.0	25.5	24.0	24.0	25.5	24.0	24.0	25.5	24.0	24.0	25.5	24.0	24.0	25.5	24.0	24.0	25.5	24.0	24.0	
	dx	43.3	42.9	40.8	45.3	44.6	44.7	45.8	43.5	42.9	42.9	40.8	42.9	42.9	40.8	42.9	42.9	40.8	42.9	42.9	40.8	42.9	42.9	40.8	42.9	42.9	40.8	42.9	42.9	40.8	42.9	42.9	
	s	50.0	49.2	48.6	48.1	48.1	52.1	49.8	51.6	50.3	51.7	50.3	53.3	51.2	50.0	49.6	49.1	49.1	49.1	49.1	49.1	48.1	48.1	49.1	49.1	48.1	48.1	49.1	49.1	49.1	49.1	49.1	49.1

legenda:  
 uporabljene ocene za izračun končnih vrednosti premikov  
 premik je statistično značilen

Podatki o premikih točk po komponentah in skupnih premikih so podani numerično v preglednici 2, statistično značilni premiki po komponentah in statistično značilni skupni premiki so označeni z barvno podlago, in grafično na sliki 1.

### 3.1 Komentar rezultatov – premiki točk po koordinatnih komponentah

V izračunu utežne funkcije z oceno  $L_1$  za komponente vektorja premika točke po enačbi iz srednjega stolpca v preglednici 1 težavo nedoločnosti rešimo na oba predlagana načina. Če v enačbi (9a) uporabimo vrednosti za  $\varepsilon$  med 0,0001 m in 0,000001 m, ali če uporabimo enačbo (10), se vrednosti za skupen premik točke ne razlikujejo za več kot desetinko milimetra, različno je le število korakov iteracijskega procesa (kar zaradi današnjih procesorjev ni pomembno).

Če izračunamo utežne funkcije z oceno  $L_1-L_2$  za komponente vektorja premika točke po enačbi v preglednici 1, se dobljeni rezultati precej razlikujejo od simuliranih. Po tej oceni dobimo, da sta se premaknili tudi točki 5 in 6, kar se ne ujema s simuliranimi rezultati.

V izračunih utežne funkcije z oceno  $L_p$  za komponente vektorja premika točke po enačbi v preglednici 1 uporabimo različne vrednosti eksponenta  $\nu$ . Če uporabimo za vrednost  $\nu = 1,1$  ali  $\nu = 1,2$ , dobimo vrednost za komponento vektorja premika točke največ 6,2 mm drugačno od simulirane (navedena vrednost velja za komponento  $x$  točke 3), vendar po testiranju stabilnosti posamezne komponente za vse točke pravilno potrdimo simulirani premik oziroma stabilnost točke. Če pa izračunamo utežno funkcijo z eksponentom  $\nu \geq 1,3$ , pa trditev po testiranju stabilnosti posamezne komponente ni vedno pravilna glede na simuliran premik. Če v enačbi (9b) uporabimo vrednosti za  $\varepsilon$  med 0,0001 m in 0,000001 m, ali če uporabimo enačbo (10), se vrednosti za skupen premik točke razlikujejo kvečjemu za 0,0001 m, različno je le število korakov iteracijskega procesa.

S Huberjevo oceno za komponente vektorja premika točke po enačbi v preglednici 1 dobimo največjo razliko 5,6 mm v vrednosti za komponento  $x$  vektorja premika točke 3, če v izračunu utežne funkcije uporabimo  $c = 1,3450$  oziroma  $c = 2,0$ , razlike na drugih točkah so manjše. Ne glede na vrednost  $c$  pa za točko 4 velja, da po testiranju stabilnosti posamezne komponente dobimo, da se je točka premaknila, kar je drugače glede na simulirano stanje.

Podobne rezultate kot s Huberjevo oceno dobimo tudi z modificirano Huberjevo oceno za komponente vektorja premika točke po enačbi v preglednici 1. Največjo razliko 5,7 mm dobimo v vrednosti za komponento  $x$  vektorja premika točke 3, če v izračunu utežne funkcije uporabimo  $c = 1,2107$ ,  $c = 1,339$  oziroma  $c = 1,5$ , razlike na drugih točkah so manjše. Za točko 4 po testiranju stabilnosti posamezne komponente spet dobimo, da se je točka premaknila, kar je drugače glede na simulirano stanje. Če v enačbi (9c) uporabimo vrednosti za  $\varepsilon$  med 0,0001 m in 0,000001 m, ali če uporabimo enačbo (10), vedno dobimo enake rezultate, enako je celo število korakov iteracijskega procesa.

Z uporabo Fairrove ocene za komponente vektorja premika točke po enačbi v preglednici 1 dobimo precej podobne rezultate, kot jih dobimo s Huberjevo oceno. Točka 4 ponovno izkazuje neskladje s simulirano stabilnostjo.

Chauchyjeva, Welscheva in Tukeyjeva ocena za komponente vektorja premika točke po enačbah v preglednici 1 dajo podobne rezultate simuliranim. Potrjena je stabilnost točk 4, 5 in 6 ter nestabilnost točk 1, 2, 3 in 7.

Po testiranju stabilnosti posamezne komponente z German-McClurejevo oceno za komponente vektorja premika točke po enačbah v preglednici 1 se za točki 5 in 6 rezultat ne ujema glede s simuliranim stanjem.

Če uporabimo različne konstante (Erenoglu, 2018; Banaś, 2017; Labant et al., 2011) v Hampelovi oceni za komponente vektorja premika točke po enačbi v preglednici 1, dobimo precej podobne rezultate – izračunane komponente premikov se razlikujejo za največ 3,6 mm, izračunani premiki pa 2,5 mm. Potrjena je stabilnost točk 4, 5 in 6 ter nestabilnost točk 1, 2, 3 in 7. Zelo podobne rezultate, dobljene s Hampelovo oceno, dobimo tudi z dansko oceno za komponente vektorja premika točke po enačbah v preglednici 1.

### 3.2 Komentar rezultatov – skupni premik točk

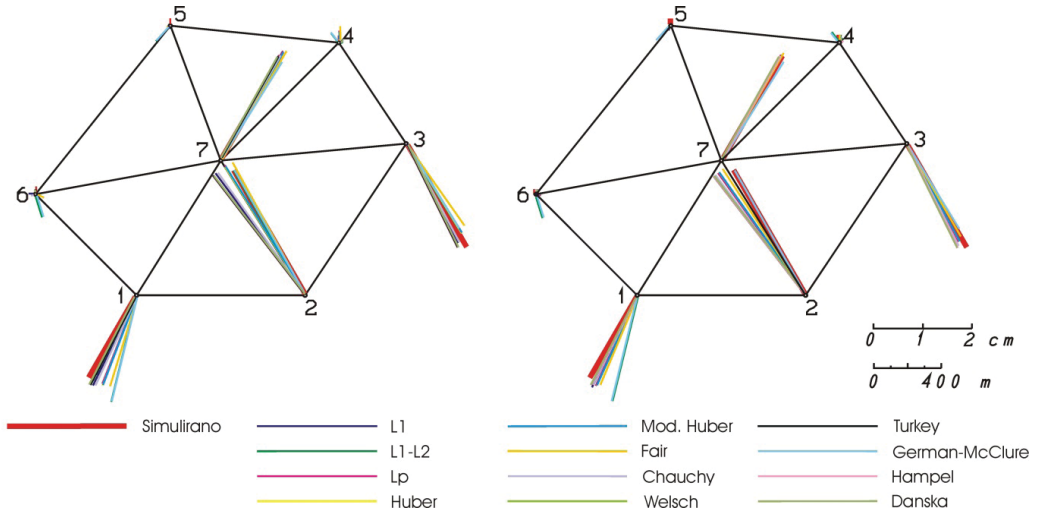
V petem koraku deformacijske analize pa lahko naenkrat izračunamo vektor premika za posamezno točko  $\mathbf{d}$  z metodo iterativnega prilagajanja uteži s transformacijo  $S$ . Ves izračun naredimo popolnoma enako, kot opisan postopek izračuna vektorja premika po komponentah, le za izračun diagonalnih elementov matrike  $\mathbf{W}$  uporabimo utežne funkcije iz desnega stolpca namesto iz srednjega stolpca v preglednici 1 in izračunano testno statistiko po enačbi (17) primerjamo s kritično vrednostjo, ki je v vseh primerih izračunov vektor premika za posamezno točko z različnimi utežnimi funkcijami enaka  $F_{f, b_i, 1-\alpha} = 3,150$  ( $f = 60, b_i = 2$ ). V preglednici 2 prikazujemo rezultate po zadnji iteraciji v stolpcih z oznako  $s$ .

Rezultati testiranja premikov točk, ki jih izračunamo z različnimi ocenami  $M$  oziroma z različnimi utežnimi funkcijami, so med seboj podobni, saj pravilno določijo, katere točke so se statistično značilno premaknile, le ocena  $L_1-L_2$  in German-McClurejeva ocena za premik točke napačno določita, da so se točke 4, 5 in 6 statistično značilno premaknile. Tudi sicer dobimo s tema dvema ocenama zelo podobne rezultate. Če pa primerjamo velikosti izračunanih premikov točk in ne upoštevamo rezultatov ocene  $L_1-L_2$  in German-McClurejeve ocene, saj dobimo z njima najslabše rezultate, lahko rečemo, da dobimo največjo razliko glede na simulirane premike z oceno  $L_1$  (za točke 1, 5 in 7) in Fairovo oceno (za točke 2, 3, 4 in 6).

Če za rešitev težave nedoločenosti v izračunu utežne funkcije z oceno  $L_1$  za vektorja premika točke uporabimo v enačbah (14a), (14b) ali (14c) vrednosti za  $\varepsilon$  med 0,0001 m in 0,000001 m, se vrednosti za skupen premik točke razlikujejo kvečjemu za 0,0001 m, različno je tudi število korakov iteracijskega procesa.

Na sliki 1 grafično prikazujemo izračunane premike točk najprej, če jih obravnavamo po komponentah (zgoraj), in nato, če naenkrat izračunamo vektor premika. Ob izbiri ustreznega merila in različnih barv lahko že iz grafičnega prikaza prepoznamo:

- izračunani premiki po komponentah se na simulirano nestabilnih točkah (1, 2, 3 in 7) nebitveno razlikujejo,
- izračunani skupni premiki se na simulirano nestabilnih točkah (1, 2, 3 in 7) nebitveno razlikujejo,
- za izračun premikov po komponentah dajejo na simulirano nestabilnih točkah vse metode podobne rezultate, dovolj dobre, da je odločitev o nestabilnosti lahka,
- evidentna je napačno ugotovljena nestabilnost točk 4, 5 in 6 za ocene  $L_1-L_2$ , German-McClurejevo oceno ter nestabilnost točke 4 tudi za Huberjevo, modificirano Huberjevo in Fairovo oceno.



Slika 1: Levo: izračunani premiki točk, če jih obravnavamo po komponentah premika točke; desno: izračunani premiki točk, če naenkrat izračunamo vektor premika za posamezno točko.

### 3.3 Končni premiki točk

V zadnjem, šestem koraku deformacijske analize opravimo testiranje stabilnosti posamezne komponente oziroma naenkrat obeh komponent vektorja premika točke geodetske mreže. Sestavimo testno statistiko po enačbi (17) z izračunanim  $\mathbf{d}^{(i=kon)}$  – enačba (18) in  $\mathbf{Q}_{dd}^{(i=kon)}$  – enačba (19). Končne rezultate podajamo v preglednici 2 (zadnji stolpec – končno). Izračunane končne premike točk, če jih obravnavamo po komponentah premika točke, zapišemo pod  $d_y, d_x$ , če pa jih naenkrat izračunamo, jih zapišemo pod  $s$ .

Če za izračun premikov (in pripadajočih kovariančnih matrik premikov) uporabimo tiste ocene  $M$ , ki dajo enak rezultat po testiranju premikov (ocena  $L_1$  in  $L_p$ , Chauchyjeva, Welscheva, Tukeyjeva, Hampelova in danska ocena za komponente vektorja premika točke ter ocena  $L_1$  in  $L_p$ , Huberjeva, modificirana Huberjeva, Fairova, Chauchyjeva, Welscheva, Tukeyjeva, Hampelova in danska ocena za premik točke), izračunamo z vsemi ocenami popolnoma enake rezultate za vrednosti komponent premikov, vrednosti premikov in rezultate po testiranju premikov. Z drugimi ocenami (ki jih v prejšnjem stavku nismo navedli), s katerimi dobimo drugačne rezultate po testiranju premikov, pa se rezultati za vrednosti komponent premikov pričakovano razlikujejo od simuliranih.

### 4 SKLEP

V članku podrobno opisujemo postopek deformacijske analize z robustnimi metodami. Geodetski datum moramo v izravnavi terminske izmere izbrati tako, da ga določajo samo stabilne referenčne točke. Le tako lahko primerjamo koordinate točk različnih terminskih izmer med seboj in določamo njihove premike. Če geodetski datum določajo tudi nestabilne referenčne točke, kar se v praksi lahko zgodi, rešitev ni primerljiva, saj ne moremo med seboj primerjati koordinat točk in določati premikov točk, ki se nanašajo na različne geodetske datume. Težavo zaradi zahteve, da morajo geodetski datum določati samo stabilne referenčne točke, rešimo z robustnimi metodami, ko nestabilne referenčne točke obravnavamo kot grobo

pogrešene meritve v modelu. Rezultat uporabe robustnih metod zagotavlja, da je tako določeni datum robusten glede na referenčne točke, ki so se statistično premaknile (Chen, 1983).

Za izračun vrednosti elementov na diagonali matrike uteži, ki jo potrebujemo za izračun matrike transformacije  $S$ , smo uporabili različne utežne funkcije. Vse utežne funkcije smo izračunali z dvema različnima načinoma obravnavanja premikov, in sicer smo najprej uporabili posamezne komponente vektorja premika točke in nato skupen premik točke. Izračune smo naredili z različnimi konstantami v Huberjevi, modificirani Huberjevi, Fairovi, Chauchyjevi, Welschevi, Tukeyjevi, Hampelovi in danski oceni, ki smo jih zasledili v literaturi in so jih predlagali avtorji prispevkov. Tudi težavo v točki nedoločnosti pri uporabi nekaterih utežnih funkcij (oceni  $L_1$  in  $L_p$  ter modificirana Huberjeva ocena) smo reševali na tri različne načine.

Z oceno  $L_1$ ,  $L_p$  ali Chauchyjevo, Welschevo, Tukeyjevo, Hampelovo ali dansko oceno za komponente vektorja premika točke smo dobili zelo podobne rezultate in pravilno trditev o stabilnosti posamezne točke. Ko smo ugotavljali stabilnost referenčnih točk z oceno  $L_1$ ,  $L_p$  ali Huberjevo, modificirano Huberjevo, Fairovo, Chauchyjevo, Welschevo, Tukeyjevo, Hampelovo ali dansko oceno, če smo naenkrat izračunali skupen premik točke, smo tudi dobili zelo podobne rezultate. Z naštetimi metodami smo dobili rezultate, ki so podobni simuliranim, torej izhodiščnim rezultatom, pa tudi rezultatom, ki jih dobimo z drugimi metodami deformacijske analize, pri katerih se uporablja kongruenčni model (Hannover, Karlsruhe, Delft, Fredericton in München).

Prav tako so si bili rezultati zelo podobni, če smo za izračun utežnih funkcij uporabili različne konstante.

Pri uporabi različnih načinov reševanja težave v točki nedoločnosti, ki nastopi pri nekaterih ocenah, smo prišli do spoznanja, da po vseh načinih dobimo zelo podobne rezultate.

## ZAHVALA

Prispevek je nastal v okviru raziskovalnega programa *Geoinformacijska infrastruktura in trajnostni prostorski razvoj Slovenije (P2-0227)*, ki ga sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije – ARRS iz državnega proračuna.

## Literatura in viri:

- Ambrožič, T. (2001). Deformacijska analiza po postopku Hannover. *Geodetski vestnik*, 45 (1-2), 38–53. <http://www.geodetski-vestnik.com/45/gv45-12.pdf>, pridobljeno 5. 5. 2018.
- Ambrožič, T. (2004). Deformacijska analiza po postopku Karlsruhe. *Geodetski vestnik*, 48 (3), 315–331. [http://www.geodetski-vestnik.com/56/1/gv56-1\\_009-026.pdf](http://www.geodetski-vestnik.com/56/1/gv56-1_009-026.pdf), pridobljeno 5. 5. 2018.
- Amiri-Simkooei, A. R., Alaei-Tabatabaei, S. M., Zangeneh-Nejad, F., Voosoghi, B. (2017). Stability Analysis of Deformation-Monitoring Network Points Using Simultaneous Observation Adjustment of Two Epochs. *Journal of Surveying Engineering*, 143 (1), 1–16. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)SU.1943-5428.0000195](https://doi.org/10.1061/(ASCE)SU.1943-5428.0000195)
- Andrews, D. F. (1974). A Robust Method for Multiple Linear Regression. *Technometrics*, 16 (4), 523–531. DOI: <https://doi.org/10.1080/00401706.1974.10489233>
- Banaš, M. (2017). Application of Robust Estimation Methods to Displacements Determination in Geodetic Control Network of Dam. *Baltic Geodetic Congress*, 22–25 June 2017, Gdansk (str. 89–94). DOI: <https://doi.org/10.1109/BGC.Gematics.2017.42>
- Berné Valero, J. L., Baselga, S. (2005). Robust estimation in geodetic networks. *Física de la Tierra*, 17, 7–22. <http://revistas.ucm.es/index.php/FITE/article/view/FITE0505110007A>, pridobljeno 5. 5. 2018.
- Bogatin, S., Kogoj, D. (2006). Pregled modelov vrednotenja geodetskih kontrolnih meritev. *Geodetski vestnik*, 50 (2), 201–210. [http://www.geodetski-vestnik.com/50/2/gv50-2\\_201-210.pdf](http://www.geodetski-vestnik.com/50/2/gv50-2_201-210.pdf), pridobljeno 5. 5. 2018.
- Caspary, W. F. (1988). *Concepts of Network and Deformation Analysis*. Kensington: The University of New South Wales, School of Surveying.
- Caspary, W. F., Haen, W., Borutta, H. (1990). *Deformation Analysis by Statistical*

- Methods. *Technometrics*, 32 (1), 49–57. DOI: <https://doi.org/10.1080/00401706.1990.10484592>
- Chen, Y. Q. (1983). *Analysis of Deformation Surveys – A Generalized Approach*. Doktorska disertacija. Fredericton: University of New Brunswick, Department of Geodesy and Geomatics Engineering. <http://www2.unb.ca/gge/Pubs/TR94.pdf>, pridobljeno 5. 5. 2018.
- Chen, Y. Q., Chrzanowski, A., Secord, J. M. (1990). A strategy for the analysis of the stability of reference points in deformation surveys. *CISM Journal ACSGC*, 44 (2), 141–149. [https://www.researchgate.net/publication/296725463\\_A\\_strategy\\_for\\_the\\_analysis\\_of\\_the\\_stability\\_of\\_reference\\_points\\_in\\_deformation\\_surveys](https://www.researchgate.net/publication/296725463_A_strategy_for_the_analysis_of_the_stability_of_reference_points_in_deformation_surveys), pridobljeno 5. 5. 2018.
- Chrzanowski, A., Chen, Y. Q., Secord, J. M. (1986). Geometrical analysis of deformation surveys. VY. Bock (ur.), *Proceedings of the Deformation Measurements Workshop*, 31 October–1 November, Boston (str. 170–206). Boston: Massachusetts Institute of Technology. <http://www2.unb.ca/ccge/publications/downloads/CCGE%20-%201986%20-%20Geometrical%20analysis%20of%20deformation%20surveys.pdf>, pridobljeno 5. 5. 2018.
- Erenoglu, R. C. (2018). A Novel Robust Scaling for EDM Calibration Baselines using Monte Carlo Study. *Tehnički vjesnik*, 25 (1), 92–99. DOI: <https://doi.org/10.17559/TV-20160407214150>
- Frankić, K. (2012). Analiza deformacij s Helmertovo transformacijo. *Geodetski vestnik*, 56 (1), 27–40. DOI: <https://doi.org/10.15292/geodetski-vestnik.2012.01.027-040>
- Gašinec, J., Gašincová, S. (2016). Landslide deformation analysis based on robust M-estimations. *Inzineria Mineralna*, 17 (1), 171–176. [http://yadda.icm.edu.pl/yadda/element/bwmeta1.element.baztech-d7a8f9e5-23dd-4ee5-8216-aa3565d34b65/c/IM\\_1-2016-a25.pdf](http://yadda.icm.edu.pl/yadda/element/bwmeta1.element.baztech-d7a8f9e5-23dd-4ee5-8216-aa3565d34b65/c/IM_1-2016-a25.pdf), pridobljeno 5. 5. 2018.
- Grigillo, D., Stopar, B. (2003). Metoda odkrivanja grobih pogreškov v geodetskih opazovanjih. *Geodetski vestnik*, 47 (4), 387–403. [http://www.geodetski-vestnik.com/47/4/gv47-4\\_387-403.pdf](http://www.geodetski-vestnik.com/47/4/gv47-4_387-403.pdf), pridobljeno 5. 5. 2018.
- Hassan, K. M. Z. (2016). Comparative Evaluation Among Various Robust Estimation Methods in Deformation Analysis. *Spatial Information Research*, 24 (4), 485–492. DOI: <https://doi.org/10.1007/s41324-016-0047-5>
- Labant, S., Weiss, G., Kukučka, P. (2011). Robust adjustment of a geodetic network measured by satellite technology in the Dargovských Hrdinov suburb. *Acta Montanistica Slovaca*, 16 (3), 229–238. [https://www.researchgate.net/publication/268408359\\_Robust\\_adjustment\\_of\\_a\\_geodetic\\_network\\_measured\\_by\\_satellite\\_technology\\_in\\_the\\_Dargovskych\\_Hrdinov\\_suburb](https://www.researchgate.net/publication/268408359_Robust_adjustment_of_a_geodetic_network_measured_by_satellite_technology_in_the_Dargovskych_Hrdinov_suburb), pridobljeno 5. 5. 2018.
- Lim, M. C., Setan, H. (2014). A Practical Deformation Monitoring Procedure and Software System for CORS Coordinate Monitoring. V FIG Congress 2014, *Engaging the Challenges – Enhancing the Relevance*, 16–21. junij 2014, Kuala Lumpur, Malezija (str. 1–22). [https://www.fig.net/resources/monthly\\_articles/2014/april\\_2014/lim\\_setan\\_april\\_2014.pdf](https://www.fig.net/resources/monthly_articles/2014/april_2014/lim_setan_april_2014.pdf), pridobljeno 5. 5. 2018.
- Marjetič, A., Regar, K. (2016). Določitev primernega geodetskega datuma z uporabo robustnih statističnih metod. *Geodetski vestnik*, 60 (2), 212–226. DOI: <https://doi.org/10.15292/geodetski-vestnik.2016.02.212-226>
- Marjetič, A., Stopar, B. (2007). Geodetski datum in S-transformacija. *Geodetski vestnik*, 51 (3), 549–564. [http://www.geodetski-vestnik.com/51/3/gv51-3\\_549-564.pdf](http://www.geodetski-vestnik.com/51/3/gv51-3_549-564.pdf), pridobljeno 5. 5. 2018.
- Marjetič, A., Zemljak, M., Ambrožič, T. (2012). Deformacijska analiza po postopku Delft. *Geodetski vestnik*, 56 (1), 9–26. DOI: <https://doi.org/10.15292/geodetski-vestnik.2012.01.009-026>
- Van Mierlo, J. (1978). A testing procedure for analysing geodetic deformation measurements. V L. Hallermann (ur.), *Proceedings of the II. International Symposium on Deformation Measurements by Geodetic Methods*, Bonn, Germany (str. 321–353). Stuttgart: Konrad Wittwer.
- Mihailović, K., Aleksić, I. (1994). *Deformaciona analiza geodetskih mreža*. Beograd: Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet, Institut za geodeziju.
- Nowel, K. (2015). Robust M-Estimation in Analysis of Control Network Deformations: Classical and New Method. *Journal of Surveying Engineering*, 141 (4), 1–10. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)SU.1943-5428.0000144](https://doi.org/10.1061/(ASCE)SU.1943-5428.0000144)
- Nowel, K. (2016). Investigating efficacy of robust M-estimation of deformation from observation differences. *Survey Review*, 48 (346), 21–30. DOI: <https://doi.org/10.1080/00396265.2015.1097585>
- Ogundare, J. O. (2016). *Precision Surveying: The Principles and Geomatics Practice*. Hoboken: John Wiley & Sons.
- Pardoe, I., Simon, L., Young, D. (2018). Regression Methods, Lesson 13: Weighted Least Squares & Robust Regression, 13.3 – Robust Regression Methods. State College: The Pennsylvania State University, Department of Statistics Online Programs. <https://newonlinecourses.science.psu.edu/stat501/node/353/>, pridobljeno 5. 5. 2018.
- Pennacchi, P. (2008). Robust estimate of excitations in mechanical systems using M-estimators – Theoretical background and numerical applications. *Journal of Sound and Vibration*, 310 (4–5), 923–946. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.08.007>
- Savšek, S. (2017). Alternativna metoda testiranja premikov v geodetski mreži. *Geodetski vestnik*, 61 (3), 387–411. DOI: <https://doi.org/10.15292/geodetski-vestnik.2017.03.387-411>
- Savšek-Safić, S., Ambrožič, T., Stopar, B., in Turk, G. (2006). Determination of Point Displacements in the Geodetic Network. *Journal of Surveying Engineering*, 132 (2), 58–63. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9453\(2006\)132:2\(58\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9453(2006)132:2(58))
- Setan, H., Singh, R. (2001). Deformation analysis of a geodetic monitoring network. *Geomatica*, 55 (3), 333–346. <http://eprints.utm.my/id/eprint/1191/1/2001-geomatica.pdf>, pridobljeno 5. 5. 2018.
- Sisman, Y. (2010). Outlier measurement analysis with the robust estimation. *Scientific Research and Essays*, 5 (7), 668–678. [http://www.academicjournals.org/article/article1380536697\\_Sisman.pdf](http://www.academicjournals.org/article/article1380536697_Sisman.pdf), pridobljeno 5. 5. 2018.
- Soldo, J., Ambrožič, T. (2018). Deformacijska analiza po postopku München. *Geodetski vestnik*, 62 (3), 392–412. DOI: <https://doi.org/10.15292/geodetski-vestnik.2018.03.392-414>
- Sušić, Z., Batilović, M., Ninkov, T., Bulatović, V., Aleksić, I., Nikolić, G. (2017). Geometric deformation analysis in free geodetic networks: case study for Fruska Gora in Serbia. *Acta Geodynamica et Geomaterialia*, 14 (3), 341–355. DOI: <https://doi.org/10.13168/AGG.2017.0017>
- Tašči, L. (2008). *Dam Deformation Measurements with GPS*. Geodezija i Kartografija,



- 34 (4), 116–121. DOI: <https://doi.org/10.3846/1392-1541.2008.34.116-121>
- Tašči, L. (2010). Analysis of dam deformation measurements with the robust and non-robust methods. *Scientific Research and Essays*, 5 (14), 1770–1779. [http://www.academicjournals.org/article/article1382947377\\_Tasci.pdf](http://www.academicjournals.org/article/article1382947377_Tasci.pdf), pridobljeno 5. 5. 2018.
- Vrečko, A., Ambrožič, T. (2013). Deformacijska analiza po postopku Fridericton. *Geodetski vestnik*, 57 (3), 479–497. DOI: <https://doi.org/10.15292/geodetski-vestnik.2013.03.479-497>

- Welsch, W. M., Heunecke, O. 2001, Models and terminology for the analysis of geodetic monitoring observations, Official report of the Ad-Hoc committee of FIG Working Group 6.1. V The 10th FIG International Symposium on Deformation Measurements, 19.–22. marec 2001, Orange, Kalifornija, ZDA (str. 390–412). [https://www.fig.net/resources/proceedings/2001/com6\\_orange\\_2001/pdf/Session%20XI\\_Paper%201.pdf](https://www.fig.net/resources/proceedings/2001/com6_orange_2001/pdf/Session%20XI_Paper%201.pdf), pridobljeno 5. 5. 2018.



- Ambrožič T., Mulahusić A., Tuno N., Topoljak J., Hajdar A., Kogoj D. (2019). Deformacijska analiza v geodetskih mrežah z robustnimi metodami. *Geodetski vestnik*, 63 (2), 163–178.  
DOI: <https://doi.org/10.15292/geodetski-vestnik.2019.02.163-178>

**izr. prof. dr. Tomaž Ambrožič, univ. dipl. inž. geod., univ. dipl. inž. rud.**

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo  
Jamova cesta 2, SI-1000 Ljubljana  
e-naslov: [tomaz.ambrozic@fgg.uni-lj.si](mailto:tomaz.ambrozic@fgg.uni-lj.si)

**izr. prof. dr. Admir Mulahusić, univ. dipl. inž. geod.**

Univerza v Sarajevu, Gradbena fakulteta  
Patriotske lige 30, BIH-71000 Sarajevo, Bosna in Hercegovina  
e-naslov: [admir\\_mulahusic@gf.unsa.ba](mailto:admir_mulahusic@gf.unsa.ba)

**doc. dr. Nedim Tuno, univ. dipl. inž. geod.**

Univerza v Sarajevu, Gradbena fakulteta  
Patriotske lige 30, BIH-71000 Sarajevo, Bosna in Hercegovina  
e-naslov: [nedim\\_tuno@gf.unsa.ba](mailto:nedim_tuno@gf.unsa.ba)

**doc. dr. Jusuf Topoljak, univ. dipl. inž. geod.**

Univerza v Sarajevu, Gradbena fakulteta  
Patriotske lige 30, BIH-71000 Sarajevo, Bosna in Hercegovina  
e-naslov: [jusuf\\_topoljak@gf.unsa.ba](mailto:jusuf_topoljak@gf.unsa.ba)

**asist. mag. Amir Hajdar, univ. dipl. inf.**

Univerza v Sarajevu, Gradbena fakulteta  
Patriotske lige 30, BIH-71000 Sarajevo, Bosna in Hercegovina  
e-naslov: [amir\\_hajdar@gf.unsa.ba](mailto:amir_hajdar@gf.unsa.ba)

**izr. prof. dr. Dušan Kogoj, univ. dipl. inž. geod.**

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo  
Jamova cesta 2, SI-1000 Ljubljana  
e-naslov: [dusan.kogoj@fgg.uni-lj.si](mailto:dusan.kogoj@fgg.uni-lj.si)