

DEFORMACIJSKA ANALIZA PO POSTOPKU MÜNCHEN

DEFORMATION ANALYSIS: THE MÜNCHEN APPROACH

Jure Soldo, Tomaž Ambrožič

UDK: 528.3
Klasifikacija prispevka po COBISS.SI: 1.02
Prispelo: 7. 3. 2018
Sprejeto: 10. 8. 2018

DOI: <https://doi.org/10.15292/geodetski-vestnik.2018.03.392-414>
REVIEW ARTICLE
Received: 7. 3. 2018
Accepted: 10. 8. 2018

IZVLEČEK

V članku je opisan postopek München, ki je eden izmed postopkov deformacijske analize. Njegove značilnosti so testiranje skladnosti oziroma kongruence geodetske mreže, testiranje preoblikovanja geodetske mreže, izračun deformacijskih parametrov in določitev stabilnosti točk geodetske mreže. V članku je najprej podano teoretično ozadje postopka, nato je uporabljen na primeru simuliranih meritev v dveh terminskih izmerah. Rezultati postopka München na obravnavanem primeru niso bistveno odstopali od rezultatov postopkov Fredericton, Delft, Karlsruhe in Hannover.

ABSTRACT

In this article the München approach to deformation analysis is presented. The main characteristics of this process are testing of congruence of the geodetic network, testing of affinity of the geodetic network, calculation of deformation parameters and determination of the stability of points. First, the theoretical background of the approach is described. Then it is applied to simulated observations in two epochs. In the example presented, the results of the München approach differ only slightly from the results obtained from the Fredericton, Delft, Karlsruhe and Hannover approaches.

KLJUČNE BESEDE

deformacijska analiza, postopek München, računski primer

KEY WORDS

deformation analysis, München approach, numerical example

1 UVOD

Postopek München je razvil W. Welsch na Inštitutu za geodezijo Visoke vojaške šole v Münchnu v Nemčiji (Welsch, 1982; Welsch, 1983; Welsch in Zhang, 1983; Mihailović in Aleksić, 1994). Bistvo postopka München je analiza deformacij trikotnikov, ki imajo v ogliščih točke geodetske mreže (Sušič et al., 2016b). Parametri, ki opisujejo homogene deformacije objekta (homogene so tiste, ki predpostavljajo, da so na obravnavanem objektu deformacije in zasuki konstantni), so enaki parametrom affine transformacije, ki transformira telo iz deformiranega modela v originalni (Mihailović in Aleksić, 1994; Ašanin, 1986). Homogeno deformacijo objekta opišemo z elementi affine transformacije koordinat točk geodetske mreže, ki so se premaknile. Deformacijo objekta izračunamo na podlagi velikosti spremembe kotov in dolžin (obojni so neodvisni od koordinatnega sistema) in elipse deformacij (poznane tudi kot Tissotova indikatriša). Za analizo imamo dve možnosti.

- Metoda X temelji na primerjanju koordinat točk geodetske mreže dveh terminskih izmer, ki so pod vplivom geodetskega datuma. Vpliv datuma izločimo z datumskimi transformacijami ali transformacijo S.
- Metoda L se izogne težavam geodetskega datuma. Bistvo je v primerjavi količin, ki so neodvisne od geodetskega datuma, to so smeri oziroma koti in dolžine.

Celoten postopek München lahko razdelimo na šest korakov, ki so v nadaljevanju tudi podrobneje opisani (Ašanin, 1986):

1. izravnava geodetske mreže kot proste mreže za vsako terminsko izmero posebej in odkrivanje morebitnih grobih pogreškov med meritvami,
2. transformacija terminskih izmer v isti geodetski datum, če uporabimo metodo X,
3. testiranje skladnosti geodetske mreže,
4. testiranje preoblikovanja (nem. *Affinität*, angl. *strain analysis*) geodetske mreže,
5. izračun drugih deformacijskih parametrov in
6. analiza posamezne točke.

2 TEORETIČNO OZADJE

2.1 Izravnava geodetske mreže kot proste mreže za vsako terminsko izmero posebej in odkrivanje morebitnih grobih pogreškov med meritvami

Najprej moramo zagotoviti, da natančnosti meritev v terminskih izmerah nista statistično značilno različni. Tako moramo uskladiti natančnost kotnih in dolžinskih meritev (Ambrožič, 2004). Nato moramo iz meritev izločiti grobo pogrešena merjenja. V tem koraku uporabimo splošno poznane postopke določanja grobo pogrešenih meritev, kot so Baardova, Popeova, danska ali ustrezna druga metoda (Grigillo in Stopar, 2003; Caspary, 1988). Meritve vsake terminske izmere izravnamo kot prosto mrežo z minimalno sledjo matrike kofaktorjev neznanek, kot velja za druge postopke deformacijske analize (Ambrožič, 2001). Seveda moramo orientacijske neznanke odstraniti z redukcijo neznanek v enačbah popravkov, prav tako moramo reducirati morebitno neznanke zaradi faktorja merila mreže (Van Mierlo, 1978). Če se število točk mreže v terminski izmeri t_1 razlikuje od terminske izmere t_2 , izločimo koordinatne neznanke neodstičnih točk s transformacijo S – razloženo v podpoglavju 2.2 v nadaljevanju.

Rezultat prvega koraka so: ocenjena vektorja izravnanih koordinat točk \hat{x}_i s pripadajočima matrikama kofaktorjev koordinatnih neznank $\mathbf{Q}_{\hat{x}_i, \hat{x}_i}$, referenčni varianci a posteriori enote uteži $\hat{\sigma}_{0_i}^2 = s_i^2$ za posamezno izmero (oznako s_i^2 uporabimo v nadaljevanju članka), števili nadštevilnih meritev oziroma pripadajoči prostostni stopnji f_i in defekt datuma d za pravilno sestavo datumske matrike \mathbf{H} .

2.2 Transformacija terminskih izmer v isti datum, če uporabimo metodo X

Če geodetsko mrežo izmerimo v več terminskih izmerah, lahko med seboj primerjamo le identične točke. V obravnavanih izmerah moramo zato neidentične točke izločiti. V prosti mreži določajo geodetski datum vse v izravnavo vključene točke. Če te niso identične v izmerah, se rezultati izravnave posamezne izmere nanašajo na različne geodetske datume. Ker lahko primerjamo med seboj le izmere, ki se nanašajo na isti geodetski datum (pogoj, če uporabimo metodo X), moramo rezultate izmer, ki se nanašajo na drugi geodetski datum, preračunati tako, da datum določajo le identične točke (Ambrožič, 1996).

Za reševanje navedenih nalog lahko uporabimo transformacijo S , saj je uporabno matematično orodje za transformacijo rezultatov izravnave izmere geodetske mreže iz enega v drugi geodetski datum. Enačbe transformacije iz enega v drugi enolično določen datum so Van Mierlo (1978); Marjetič in Stopar (2007); Caspary (1988); Sušić et al. (2017):

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{S}_i \hat{\mathbf{x}}_j \quad \text{in} \quad (1)$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{x}}_i} = \mathbf{S}_i \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_j, \hat{\mathbf{x}}_j} \mathbf{S}_i^T, \quad (2)$$

kjer so:

$\hat{\mathbf{x}}_i$ in $\hat{\mathbf{x}}_j \dots$ vektorja izravnanih koordinat točk v geodetskem datumu i in j ,

$\mathbf{S}_i = \mathbf{I} - \mathbf{H}(\mathbf{H}^T \mathbf{E}_i \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{E}_i \dots$ matrika transformacije S velikosti $2m \times 2m$ (m je število točk v geodetskem datumu i), ki transformira rešitev iz geodetskega datuma j v rešitev v geodetskem datumu i ,

$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{x}}_i}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_j, \hat{\mathbf{x}}_j} \dots$ matriki kofaktorjev koordinatnih neznank v geodetskem datumu i in j ,

$\mathbf{I} \dots$ enotska matrika velikosti $2m \times 2m$,

$\mathbf{H} \dots$ datumska matrika velikosti $2m \times d$ (d je defekt datuma) – njeno sestavo glej v Marjetič in Stopar (2007); Marjetič et al. (2012),

$\mathbf{E}_i \dots$ matrika velikosti $2m \times 2m$, ki ima izvendiagonalne elemente enake 0, na diagonali pa so vrednosti 1 samo na tistih mestih, ki pripadajo posamezni koordinatni komponenti točke v geodetskem datumu i , sicer so druge vrednosti tudi na diagonali tudi 0.

Ko imamo vse terminske izmere izravnane v istem geodetskem datumu, nadaljujemo deformacijsko analizo s testiranjem homogenosti natančnosti meritev obravnavanih izmer, kar naredimo s testiranjem hipoteze o homogenosti natančnosti meritev v dveh izmerah, kar je opisano v literaturi (Ambrožič, 2001; Ašanin, 1986; Mihailović in Aleksić, 1994; Sušić et al., 2015; Sušić et al., 2016a; Vrce, 2011). Po testiranju izračunamo novo oceno za referenčno varianco a posteriori (enotno vrednost iz obravnavanih terminskih izmer) z izrazom:

$$s^2 = \frac{\mathbf{v}_1^T \mathbf{P}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2^T \mathbf{P}_{\mathbf{u}_2} \mathbf{v}_2}{f_1 + f_2} = \frac{f_1 s_1^2 + f_2 s_2^2}{f} \tag{3}$$

kjer so:

\mathbf{v}_1 in $\mathbf{v}_2 \dots$ vektorja popravkov meritev po izravnavi predhodne in tekoče terminske izmere v trenutkih t_1 in t_2 ,

$\mathbf{P}_{\mathbf{u}_1}$ in $\mathbf{P}_{\mathbf{u}_2} \dots$ matriki uteži meritev v izravnavi predhodne in tekoče terminske izmere,

f_1 in $f_2 \dots$ števili nadštevilnih meritev v predhodni in tekoči terminski izmeri,

s_1^2 in $s_2^2 \dots$ referenčni varianci a posteriori po izravnavi predhodne in tekoče terminske izmere,

$f = f_1 + f_2 \dots$ skupno število nadštevilnosti meritev v obeh izmerah.

Rezultat drugega koraka so: ocenjena vektorja izravnanih koordinat **identičnih** točk $\hat{\mathbf{x}}_i$ s pripadajočima matrikama kofaktorjev koordinatnih neznank $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_i \hat{\mathbf{x}}_i}$, ki se nanašata na **isti** geodetski datum, in ocena za referenčno varianco a posteriori s^2 .

2.3 Testiranje skladnosti geodetske mreže

S testiranjem skladnosti oziroma kongruence geodetske mreže med obravnavanima terminskima izmerama poskušamo ugotoviti, ali je prišlo do premikov in deformacij objekta. Primerjani geodetski mreži sta skladni/kongruenčni, če lahko ob sicer identični geometriji mreže pojasnimo koordinatne razlike samo z upoštevanjem mej natančnosti geodetskih meritev. Testiranje skladnosti opravimo s testi matematične statistike (Ašanin, 1986; Mihailović in Aleksić, 1994).

Sestavimo ničelno in alternativno hipotezo, ki sta enaki pri metodah X in L (Welsch, 1983; Welsch in Zhang, 1983; Ašanin, 1986):

$H_0 : E(\hat{\mathbf{x}}_1) = E(\hat{\mathbf{x}}_2)$ oz. $E(\mathbf{u}) = 0 \dots$ koordinate vseh točk v mreži se med dvema terminskima izmerama niso spremenile oziroma se geodetska mreža, v obeh izmerah sestavljena iz identičnih točk, ujema v obeh izmerah in (4)

$H_a : E(\hat{\mathbf{x}}_1) \neq E(\hat{\mathbf{x}}_2)$ oz. $E(\mathbf{u}) \neq 0 \dots$ mreža, opisana v H_0 , je spremenila geometrijo in nastale so deformacije.

Metoda X

Z globalnim testom stabilnosti točk mreže (avtor metode imenuje ta test testiranje skladnosti) primerjamo varianco razlik koordinat točk s_u^2 z oceno za referenčno varianco a posteriori s^2 . Tvorimo kvadratno formo (Welsch, 1983; Welsch in Zhang, 1983):

$$q_u = \mathbf{u}^T \mathbf{Q}_u^- \mathbf{u} \tag{5}$$

Varianco razlik koordinat točk mreže izračunamo z enačbo:

$$s_u^2 = \frac{q_u}{f_u} = \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{Q}_u^- \mathbf{u}}{\text{rang } \mathbf{Q}_u} \tag{6}$$

kjer so:

$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{x}}_1 \dots$ vektor razlik izravnanih koordinat točk oziroma vektor premikov točk,

$\mathbf{Q}_u = \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_1\hat{\mathbf{x}}_1} + \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_2\hat{\mathbf{x}}_2} \dots$ matriki kofaktorjev koordinatnih razlik,

$f_u = \text{rang } \mathbf{Q}_u = u - d \dots$ število linearno neodvisnih elementov v vektorju \mathbf{u} ,

$u = 2m \dots$ število koordinatnih neznank (m je število točk v geodetski mreži).

Sestavimo testno statistiko:

$$T_1^2 = \frac{s_u^2}{s^2}. \quad (7)$$

Testna statistika se porazdeljuje po Fisherjevi porazdelitvi z izbrano stopnjo zaupanja $1 - \alpha$, z f in f_u prostostnimi stopnjami. Če je vrednost testne statistike manjša ali enaka kritični vrednosti $T_1^2 \leq F_{f, f_u, 1-\alpha}$, potem ničelne hipoteze H_0 (4) ne moremo zavrniti in lahko trdimo z verjetnostjo $1 - \alpha$, da se niso pojavile statistično značilne deformacije v mreži. Če je vrednost testne statistike večja od kritične vrednosti, potem ničelno hipotezo zavrnemo in lahko trdimo z verjetnostjo $1 - \alpha$, da so se v mreži pojavile deformacije.

Metoda L

Dolžine in smeri oziroma koti so od geodetskega datuma neodvisne količine. Ta pristop je zasnovan na spremembah vrednosti meritev, ki jih izračunamo iz izravnanih koordinat točk predhodne in tekoče terminske izmere.

Spremembo vrednosti meritev lahko zapišemo kot (Welsch, 1983; Welsch in Zhang, 1983; Mihailović in Aleksić, 1994):

$$d\mathbf{l} = \mathbf{l}_2 - \mathbf{l}_1, \quad (8)$$

kjer sta:

\mathbf{l}_1 in $\mathbf{l}_2 \dots$ vrednosti meritev, izračunane iz izravnanih koordinat točk predhodne in tekoče terminske izmere v trenutkih t_1 in t_2 .

To spremembo (8) lahko zapišemo tudi kot funkcijo premikov točk:

$$d\mathbf{l} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{u}, \quad (9)$$

s pripadajočo matriko kofaktorjev:

$$\mathbf{Q}_{d\mathbf{l}} = \mathbf{L}\mathbf{Q}_u\mathbf{L}^T, \quad (10)$$

kjer je:

$\mathbf{L} = \left[\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \right] \dots$ matrika parcialnih odvodov meritev (iz izravnanih koordinat točk) po koordinatnih neznankah.

Vrednosti elementov v matriki \mathbf{L} so odvisne od vrste meritve.

a) Če v mreži obravnavamo samo dolžine, so elementi matrike \mathbf{L} in vektorja $d\mathbf{I}$ oblike:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{dD} = \begin{bmatrix} \frac{\partial D_{ij}}{\partial \hat{y}_i} & \frac{\partial D_{ij}}{\partial \hat{x}_i} & \frac{\partial D_{ij}}{\partial \hat{y}_j} & \frac{\partial D_{ij}}{\partial \hat{x}_j} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin t_{ij} & -\cos t_{ij} & \sin t_{ij} & \cos t_{ij} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \dots \text{ena}$$

vrstica v matriki \mathbf{L} , ki se nanaša na dolžino D_{ij} , lega navedenih elementov v tej vrstici je določena z vrstnim redom pripadajočih elementov v matriki \mathbf{Q}_u ter

$$d\mathbf{I} = d\mathbf{I}_{dD} = \begin{bmatrix} D_{ij_2} - D_{ij_1} \\ \vdots \end{bmatrix} \dots \text{en element v vektorju } d\mathbf{I}, \text{ ki se nanaša na dolžino } D_{ij}, \quad (12)$$

kjer so:

$t_{ij} = (t_{ij_1} + t_{ij_2})/2 \dots$ srednja vrednost smernega kota,

$t_{ij_1} = \arctan \frac{\hat{y}_{j_1} - \hat{y}_{i_1}}{\hat{x}_{j_1} - \hat{x}_{i_1}}$ in $t_{ij_2} = \arctan \frac{\hat{y}_{j_2} - \hat{y}_{i_2}}{\hat{x}_{j_2} - \hat{x}_{i_2}} \dots$ smerna kota iz izravnanih koordinat med točkama P_i in P_j

P_j v predhodni in tekoči terminski izmeri,

$D_{ij_1} = \sqrt{(\hat{y}_{j_1} - \hat{y}_{i_1})^2 + (\hat{x}_{j_1} - \hat{x}_{i_1})^2}$ in $D_{ij_2} = \sqrt{(\hat{y}_{j_2} - \hat{y}_{i_2})^2 + (\hat{x}_{j_2} - \hat{x}_{i_2})^2} \dots$ dolžini iz izravnanih koordinat med točkama P_i in P_j v predhodni in tekoči terminski izmeri.

b) Če v mreži obravnavamo samo kote, so elementi matrike \mathbf{L} in vektorja $d\mathbf{I}$ oblike:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{d\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \hat{y}_i} & \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \hat{x}_i} & \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \hat{y}_j} & \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \hat{x}_j} & \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \hat{y}_k} & \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \hat{x}_k} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \left(-\frac{\cos t_{ik}}{D_{ik}} + \frac{\cos t_{ij}}{D_{ij}} \right) & \left(\frac{\sin t_{ik}}{D_{ik}} - \frac{\sin t_{ij}}{D_{ij}} \right) & \left(-\frac{\cos t_{ij}}{D_{ij}} \right) & \left(\frac{\sin t_{ij}}{D_{ij}} \right) & \left(\frac{\cos t_{ik}}{D_{ik}} \right) & \left(-\frac{\sin t_{ik}}{D_{ik}} \right) & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

\dots ena vrstica v matriki \mathbf{L} , ki se nanaša na kot α_{ij} , lega navedenih elementov v tej vrstici je določena z vrstnim redom pripadajočih elementov v matriki \mathbf{Q}_u ter

$$d\mathbf{I} = d\mathbf{I}_{d\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_{ij_{k_2}} - \alpha_{ij_{k_1}} \\ \vdots \end{bmatrix} \dots \text{en element v vektorju } d\mathbf{I}, \text{ ki se nanaša na kot } \alpha_{ijk}, \quad (14)$$

kjer so:

$t_{ij} = (t_{ij_1} + t_{ij_2})/2$ in $t_{ik} = (t_{ik_1} + t_{ik_2})/2 \dots$ srednji vrednosti smernih kotov,

t_{ij_1} in t_{ik_1} ter t_{ij_2} in $t_{ik_2} \dots$ smerni koti iz izravnanih koordinat med točkama P_i in P_j ter P_i in P_k v predhodni in tekoči terminski izmeri,

$D_{ij} = (D_{ij_1} + D_{ij_2})/2$ in $t_{ik} = (D_{ik_1} + D_{ik_2})/2 \dots$ srednji vrednosti dolžin,

D_{ij_1} in D_{ik_1} ter D_{ij_2} in $D_{ik_2} \dots$ dolžine iz izravnanih koordinat med točkama P_i in P_j ter P_i in P_k v predhodni

in tekoči terminski izmeri,

$\alpha_{ijk_1} = t_{ik_1} - t_{ij_1}$ in $\alpha_{ijk_2} = t_{ik_2} - t_{ij_2} \dots$ kota na točki P_i v predhodni in tekoči terminski izmeri.

c) Če v mreži obravnavamo dolžine in kote, so elementi matrike \mathbf{L} in vektorja $d\mathbf{l}$ oblike:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{dD} \\ \mathbf{L}_{d\alpha} \end{bmatrix} \text{ in} \tag{15}$$

$$d\mathbf{l} = \begin{bmatrix} d\mathbf{l}_{dD} \\ d\mathbf{l}_{d\alpha} \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Tvorimo kvadratno formo:

$$q_{d\mathbf{l}} = d\mathbf{l}^T \mathbf{Q}_{d\mathbf{l}} d\mathbf{l}. \tag{17}$$

Če v kvadratno formo (17) vstavimo enačbi (9) in (10), dobimo:

$$q_{d\mathbf{l}} = \mathbf{u}^T \mathbf{L}^T (\mathbf{L} \mathbf{Q}_{d\mathbf{l}} \mathbf{L}^T)^{-1} \mathbf{L} \mathbf{u}. \tag{18}$$

Če matriko \mathbf{L} razcepimo s singularnim razcepom SVD na $\mathbf{L}_{m \times n} = \mathbf{U}_{m \times m} \Sigma_{m \times n} \mathbf{V}_{n \times n}^T$ (Plestenjak, 2015)

in jo vstavimo v enačbo (18), lahko zapišemo:

$$\begin{aligned} q_{d\mathbf{l}} &= \mathbf{u}^T (\mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^T)^T (\mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^T \mathbf{Q}_{d\mathbf{l}} (\mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^T)^T)^{-1} \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^T \mathbf{u}, \\ q_{d\mathbf{l}} &= \mathbf{u}^T \mathbf{V} \Sigma^T \mathbf{U}^T (\mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^T \mathbf{Q}_{d\mathbf{l}} \mathbf{V} \Sigma^T \mathbf{U}^T)^{-1} \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^T \mathbf{u}, \\ q_{d\mathbf{l}} &= \mathbf{u}^T \mathbf{V} \Sigma^T \mathbf{U}^T \mathbf{U}^T \Sigma^{-T} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Q}_{d\mathbf{l}} \mathbf{V}^T \Sigma^{-1} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^T \mathbf{u} \text{ in končno} \\ q_{d\mathbf{l}} &= \mathbf{u}^T \mathbf{Q}_{d\mathbf{l}} \mathbf{u} = q_{\mathbf{u}}, \end{aligned} \tag{19}$$

kjer so:

$\mathbf{U}_{m \times m}$ in $\mathbf{V}_{n \times n} \dots$ ortogonalni kvadratni matriki velikosti $m \times m$ oziroma $n \times n$,

$$\Sigma_{m \times n} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots \text{pravokotna diagonalna matrika singularnih vrednosti matrike } \mathbf{L} \text{ velikosti } m \times n,$$

ki ima inverzno matriko $\Sigma_{n \times m}^- = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1/\sigma_n & \dots & 0 \end{bmatrix}$ velikosti $n \times m$ in

velja: $\mathbf{U}^T \mathbf{U}^T = \mathbf{I}$, $\Sigma^T \Sigma^T = \mathbf{I}$, $\mathbf{V} \mathbf{V} = \mathbf{I}$, $\mathbf{U}^{-1} \mathbf{U} = \mathbf{I}$, $\Sigma^{-1} \Sigma = \mathbf{I}$ in $\mathbf{V}^T \mathbf{V}^T = \mathbf{I}$.

Iz enačbe (19) vidimo, da dobimo enako vrednost za $q_{d\mathbf{l}}$ in $q_{\mathbf{u}}$, kvadratni formi (5) in (19) sta neodvisni od datuma mreže (Mihailović in Aleksić, 1994).

Analogno kot pri metodi X tudi pri metodi L primerjamo varianco spremembe vrednosti meritev s_{d1}^2 z oceno za referenčno varianco a posteriori s^2 z globalnim testom. Varianco spremembe vrednosti meritev v mreži izračunamo z enačbo (Welsch, 1983; Welsch in Zhang, 1983):

$$s_{d1}^2 = \frac{q_{d1}}{f_{d1}} = \frac{d1^T Q_{d1}^{-1} d1}{\text{rang } Q_{d1}}. \tag{20}$$

Sestavimo testno statistiko:

$$T_1^2 = \frac{s_{d1}^2}{s^2}. \tag{21}$$

Testna statistika se porazdeljuje po Fisherjevi porazdelitvi z izbrano stopnjo zaupanja $1 - \alpha$, z f in f_{d1} prostostnimi stopnjami. Če je vrednost testne statistike manjša ali enaka kritični vrednosti $T_1^2 \leq F_{f, f_{d1}, 1-\alpha}$ potem ničelne hipoteze H_0 (4) ne moremo zavrniti in lahko trdimo z verjetnostjo $1 - \alpha$, da se niso pojavile statistično značilne deformacije v mreži. Če je vrednost testne statistike večja od kritične vrednosti, potem ničelno hipotezo zavrnemo in lahko trdimo z verjetnostjo $1 - \alpha$, da so se pojavile deformacije v mreži.

Testirane skladnosti geodetskih mrež v metodi München je popolnoma enako kot globalni test stabilnosti točk mreže v dveh izmerah v metodi Hannover (Ambrožič, 2001; Ašanin, 1986; Mihailović in Aleksić, 1994; Sušić et al., 2015; Sušić et al., 2016a; Sušić et al., 2017; Vrce, 2011) in je enako, če uporabimo metodo X ali metodo L.

Če v tem koraku ugotovimo, da so nastale statistično značilne deformacije, lahko preidemo na naslednji korak deformacijske analize, sicer analizo končamo.

2.4 Testiranje preoblikovanja geodetske mreže

Za boljši vpogled v nastale deformacije moramo geodetsko mrežo deliti na trikotnike. Za testiranje preoblikovanja posameznega trikotnika (nem. *Affinität*, ang. *strain analysis*) uporabimo tehniko deformacijske analize (Ašanin, 1986). Primerjani geodetski mreži sta afini, ko lahko ob sicer identični konfiguraciji mreže pojasnimo koordinatne razlike samo z afinim preoblikovanjem mreže.

Sestavimo ničelno in alternativno hipotezo, ki sta enaki pri metodah X in L (Ašanin, 1986; Welsch in Zhang, 1983):

$$H_0: E(\mathbf{u} - \mathbf{H}_a \mathbf{p}) = 0 \dots \text{trikotnik ni spremenil oblike med obravnavanima izmerama in} \tag{22}$$

$$H_a: E(\mathbf{u} - \mathbf{H}_a \mathbf{p}) \neq 0 \dots \text{oblika trikotnika se je med obravnavanima izmerama spremenila.}$$

Metoda X

V skladu s teorijo homogenih deformacij za majhne premike in deformacije zapišemo linearno zvezo med koordinatami točk mreže iz dveh terminskih izmer kot (Welsch, 1983; Mihailović in Aleksić, 1994; Sušić et al., 2016b):

$$\hat{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{t}, \tag{23}$$

kjer so:

$\hat{\mathbf{x}}_1$ in $\hat{\mathbf{x}}_2 \dots$ vektorja izravnanih koordinat točk iz izravnave predhodne in tekoče izmere,

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_2 \\ \hat{\mathbf{x}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_2}{\partial \hat{\mathbf{x}}_1} & \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_2}{\partial \hat{\mathbf{y}}_1} \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{y}}_2}{\partial \hat{\mathbf{x}}_1} & \frac{\partial \hat{\mathbf{y}}_2}{\partial \hat{\mathbf{y}}_1} \end{bmatrix} \dots \text{odvodi koordinat točk tekoče izmere glede na predhodno izmero,}$$

$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} \dots$ vektor komponent translacije tega telesa (objekta) v smereh koordinatnih osi.

Če od zgornje enačbe odštejemo vektor $\hat{\mathbf{x}}_1$, dobimo vektor premikov točk:

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{x}}_1 = (\mathbf{F} - \mathbf{I}) \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{t} \text{ in}$$

$$\mathbf{u} = d\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{t}, \quad (24)$$

kjer je:

$$d\mathbf{F} = (\mathbf{F} - \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}_x}{\partial \hat{\mathbf{x}}_1} & \frac{\partial \mathbf{u}_x}{\partial \hat{\mathbf{y}}_1} \\ \frac{\partial \mathbf{u}_y}{\partial \hat{\mathbf{x}}_1} & \frac{\partial \mathbf{u}_y}{\partial \hat{\mathbf{y}}_1} \end{bmatrix} \dots \text{deformacijska matrika (gradient premikov).} \quad (25)$$

Gradient premikov $d\mathbf{F}$ je nesimetrična matrika, ki jo razstavimo na vsoto matrik \mathbf{E} in $d\mathbf{R}$:

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{2}(d\mathbf{F} + d\mathbf{F}^T) + \frac{1}{2}(d\mathbf{F} - d\mathbf{F}^T) \text{ in}$$

$$d\mathbf{F} = \mathbf{E} + d\mathbf{R}, \quad (26)$$

kjer sta:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}_x}{\partial \hat{\mathbf{x}}_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_x}{\partial \hat{\mathbf{y}}_1} + \frac{\partial \mathbf{u}_y}{\partial \hat{\mathbf{x}}_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_x}{\partial \hat{\mathbf{y}}_1} + \frac{\partial \mathbf{u}_y}{\partial \hat{\mathbf{x}}_1} \right) & \frac{\partial \mathbf{u}_y}{\partial \hat{\mathbf{y}}_1} \end{bmatrix} \dots \text{simetrična deformacijska matrika,}$$

$$d\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_y}{\partial \hat{\mathbf{x}}_1} - \frac{\partial \mathbf{u}_x}{\partial \hat{\mathbf{y}}_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_y}{\partial \hat{\mathbf{x}}_1} - \frac{\partial \mathbf{u}_x}{\partial \hat{\mathbf{y}}_1} \right) & 0 \end{bmatrix} \dots \text{antisimetrična matrika rotacije.}$$

Zgornji matriki lahko zapišemo tudi drugače:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} \\ e_{xy} & e_{yy} \end{bmatrix} \text{ in}$$

$$d\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix}.$$

Če vstavimo enačbo (26) v enačbo (24), dobimo (Welsch, 1983; Welsch in Zhang, 1983; Labant et al., 2014):

$$\mathbf{u} = (\mathbf{E} + d\mathbf{R}) \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{t} \text{ oz.} \tag{27}$$

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} \\ e_{xy} & e_{yy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{y}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}.$$

Komponenti premikov posamezne točke lahko zapišemo tudi kot:

$$u_x = \hat{x}_1 \cdot e_{xx} + \hat{y}_1 \cdot e_{xy} - \hat{y}_1 \cdot \omega + t_x \text{ in} \tag{28}$$

$$u_y = \hat{x}_1 \cdot e_{xy} + \hat{y}_1 \cdot e_{yy} + \hat{x}_1 \cdot \omega + t_y. \tag{29}$$

Te enačbe lahko zapišemo v matrični obliki:

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}_u \cdot \mathbf{p}, \tag{30}$$

kjer so:

$$\mathbf{H}_u = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 & \hat{y}_1 & 0 & -\hat{y}_1 & 1 & 0 \\ 0 & \hat{x}_1 & \hat{y}_1 & \hat{x}_1 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \dots \text{matrika deformacijskega modela, ki povezuje deformacijske}$$

parametre s premiki točk, \tag{31}

$$\mathbf{p}^T = [e_{xx} \ e_{xy} \ e_{yy} \ \omega \ t_x \ t_y] \dots \text{vektor deformacijskih parametrov,} \tag{32}$$

e_{xx} in e_{yy} ... normalni deformaciji v smeri koordinatne osi x in y ,

e_{xy} ... strižna deformacija ($= e_{yx}$),

ω ... kot rotacije,

t_x in t_y ... translaciji v smeri koordinatne osi x in y .

Ko obravnavamo sistem (30), imamo tri možnosti:

a) Ko obravnavamo eno točko, imamo dve enačbi, torej (28) in (29) – (dve vrstici v \mathbf{H}_u v (31)), in šest neznank (deformacijskih parametrov v enačbi (32)). Takšen sistem (30) nima rešitve.

b) Ko obravnavamo trikotnik, imamo šest enačb (tri enačbe (28) in tri enačbe (29)) s šestimi neznankami in eno rešitev. Iz enačbe (30) izračunamo neznanke, torej deformacijske parametre, z naslednjo enačbo:

$$\mathbf{p} = \mathbf{H}_u^{-1} \cdot \mathbf{u}. \tag{33}$$

Tvorimo kvadratno formo:

$$q_u = \mathbf{u}^T \mathbf{Q}_u \mathbf{u}. \tag{34}$$

Varianco razlik koordinat točk trikotnika izračunamo z enačbo

$$s_u^2 = \frac{q_u}{f_u} = \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{Q}_u \mathbf{u}}{\text{rang } \mathbf{Q}_u} = \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{Q}_u \mathbf{u}}{n}, \tag{35}$$

kjer je:

n ... število stranic v trikotniku ($= 3$).

Sestavimo testno statistiko:

$$T_{21}^2 = \frac{s_u^2}{s^2}, \quad (36)$$

Testna statistika se porazdeljuje po Fisherjevi porazdelitvi iz izbrano stopnjo zaupanja $1 - \alpha$, z f in n prostostnimi stopnjami. Če je vrednost testne statistike manjša ali enaka kritični vrednosti $T_{21}^2 \leq F_{f,n,1-\alpha}$, potem ničelne hipoteze H_0 (22) ne moremo zavrniti in lahko trdimo z verjetnostjo $1 - \alpha$, da trikotnik statistično ni spremenil oblike. Če je vrednost testne statistike večja od kritične vrednosti, potem ničelno hipotezo zavrnemo in lahko trdimo z verjetnostjo $1 - \alpha$, da so se pojavile deformacije v trikotniku.

c) Ko obravnavamo večkotnik, imamo merjenih več količin (ki jih izračunamo iz izravnanih koordinat točk), kot je nujno potrebno (na primer vse dolžine in kote v večkotniku), potem imamo več enačb, kot je neznan. Rešitev dobimo z metodo najmanjših kvadratov (Welsch, 1983; Welsch in Zhang, 1983; Mihailović in Aleksić, 1994):

$$\mathbf{u} + \mathbf{v}_u = \mathbf{H}_u \cdot \mathbf{u} \text{ s pripadajočo } \mathbf{P}_u, \quad (37)$$

kjer sta:

\mathbf{v}_u ... vektor popravkov koordinatnih razlik točk,

$\mathbf{P}_u = \mathbf{Q}_u^-$... matrika uteži koordinatnih razlik točk.

Iz izravnave dobimo:

$$\mathbf{p} = (\mathbf{H}_u^T \mathbf{P}_u \mathbf{H}_u)^- \cdot \mathbf{H}_u^T \mathbf{P}_u \mathbf{u}. \quad (38)$$

Tvorimo kvadratno formo po naslednji enačbi:

$$q_{\mathbf{u}+\mathbf{v}_u} = (\mathbf{u} + \mathbf{v}_u)^T \mathbf{Q}_u^- (\mathbf{u} + \mathbf{v}_u) \quad (39)$$

in ne po enačbi $q_{\mathbf{v}_u} = \mathbf{v}_u^T \mathbf{P}_u \mathbf{v}_u$, ki jo zapišejo Welsch (1983) – enačba (19), Welsch in Zhang (1983) – enačba (3–8) in Mihailović in Aleksić (1994) – enačba (10.2.24), ter varianco popravljenih koordinatnih razlik točk:

$$s_p^2 = \frac{q_{\mathbf{u}+\mathbf{v}_u}}{f_p} = \frac{(\mathbf{u} + \mathbf{v}_u)^T \mathbf{Q}_u^- (\mathbf{u} + \mathbf{v}_u)}{\text{rang } \mathbf{Q}_u}. \quad (40)$$

Sestavimo testno statistiko:

$$T_{21}^2 = \frac{s_p^2}{s^2}. \quad (41)$$

Testna statistika se porazdeljuje po Fisherjevi porazdelitvi iz izbrano stopnjo zaupanja $1 - \alpha$, z f in f_p prostostnimi stopnjami. Če je vrednost testne statistike manjša ali enaka kritični vrednosti $T_{21}^2 \leq F_{f,f_p,1-\alpha}$, potem ničelne hipoteze H_0 (22) ne moremo zavrniti in lahko trdimo z verjetnostjo $1 - \alpha$, da večkotnik

statistično ni spremenil oblike. Če je vrednost testne statistike večja od kritične vrednosti, potem ničelno hipotezo zavrnilo in lahko trdimo z verjetnostjo $1 - \alpha$, da so se pojavile deformacije v večkotniku.

Metoda L

Uporabimo povezavo med dolžinskimi deformacijami e , kotnimi spremembami $d\alpha$ in deformacijskimi parametri (Welsch, 1983; Welsch in Zhang, 1983; Mihailović in Aleksić, 1994; Acar, 2010; Deniz in Ozener, 2010):

$$e_{ij} = e_{xx} \cos^2 t_{ij} + e_{xy} \sin 2t_{ij} + e_{yy} \sin^2 t_{ij} \text{ in} \tag{42}$$

$$d\alpha_{ijk} = e_{xy} (\cos 2t_{ik} - \cos 2t_{ij}) + \frac{1}{2} (e_{yy} - e_{xx}) (\sin 2t_{ik} - \sin 2t_{ij}), \tag{43}$$

kjer so:

$$e_{ij} = \frac{D_{ij_2} - D_{ij_1}}{D_{ij_1}} \dots \text{dolžinska deformacija (specifična sprememba dolžine),} \tag{44}$$

$$d\alpha_{ijk} = \alpha_{ijk_2} - \alpha_{ijk_1} \dots \text{kotna sprememba,} \tag{45}$$

$D_{ij_1} = \sqrt{(\hat{y}_{j_1} - \hat{y}_{i_1})^2 + (\hat{x}_{j_1} - \hat{x}_{i_1})^2}$ in $D_{ij_2} = \sqrt{(\hat{y}_{j_2} - \hat{y}_{i_2})^2 + (\hat{x}_{j_2} - \hat{x}_{i_2})^2}$... dolžini iz izravnanih koordinat med točkama P_i in P_j v predhodni in tekoči terminski izmeri,

$\alpha_{ijk_1} = t_{ik_1} - t_{ij_1}$ in $\alpha_{ijk_2} = t_{ik_2} - t_{ij_2}$... kota na točki P_i v predhodni in tekoči terminski izmeri,

t_{ij_1} in t_{ik_1} ter t_{ij_2} in t_{ik_2} ... smerni koti iz izravnanih koordinat med točkama P_i in P_j ter P_i in P_k v predhodni in tekoči terminski izmeri,

Enačbe (42) in (43) lahko zapišemo v matrični obliki:

$$\mathbf{e} = \mathbf{H}_e \cdot \mathbf{p}_1 \tag{46}$$

s pripadajočo matriko kofaktorjev:

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{LQ}_u \mathbf{L}^T = \mathbf{Q}_{d\alpha}, \tag{47}$$

kjer so:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_e = \begin{bmatrix} e_{ij} \\ \vdots \end{bmatrix} \dots \text{en element v vektorju dolžinskih deformacij, če obravnavamo dolžine,} \tag{48}$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_{d\alpha} = \begin{bmatrix} d\alpha_{ijk} \\ \vdots \end{bmatrix} \dots \text{en element v vektorju kotnih sprememb, če obravnavamo kote,} \tag{49}$$

$$\mathbf{H}_e = \mathbf{H}_{e_e} = \begin{bmatrix} \cos^2 t_{ij} & \sin 2t_{ij} & \sin^2 t_{ij} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \dots \text{ena vrstica v matriki deformacijskega modela, ki povezuje}$$

deformacijske parametre z dolžinskimi deformacijami, če obravnavamo dolžine, (50)

$$\mathbf{H}_e = \mathbf{H}_{e_{d\alpha}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-\sin 2t_{ik} + \sin 2t_{ij}) & (\cos 2t_{ik} - \cos 2t_{ij}) & \frac{1}{2}(\sin 2t_{ik} - \sin 2t_{ij}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \dots \text{ena vrstica v matriki}$$

deformacijskega modela, ki povezuje deformacijske parametre s kotnimi spremembami, če obravnavamo kote,

$$(51)$$

$\mathbf{p}_1^T = [e_{xx} \ e_{xy} \ e_{yy}] \dots$ vektor deformacijskih parametrov.

$$(52)$$

Ko obravnavamo sistem (46), imamo tri možnosti:

a) Ko obravnavamo eno dolžinsko deformacijo (44) ali eno kotno spremembo (45), imamo eno vrstico v matriki deformacijskega modela (50) oziroma (51). Takšen sistem (46) nima rešitve.

b1) Ko obravnavamo dolžinske deformacije v trikotniku, imamo tri vrstice v matriki deformacijskega modela (saj imamo tri neodvisne dolžine v trikotniku) in eno rešitev sistema (46), ki jo izračunamo z naslednjo enačbo:

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{H}_e^{-1} \cdot \mathbf{e}. \quad (53)$$

Tvorimo kvadratno formo:

$$q_e = d\mathbf{l}^T \mathbf{Q}_e^- d\mathbf{l} \quad (\text{ki je enaka kvadratni formi } q_{dl} - \text{enačba (17)}) \quad (54)$$

in varianco dolžinskih in kotnih sprememb

$$s_e^2 = \frac{q_e}{f_e} = \frac{d\mathbf{l}^T \mathbf{Q}_e^- d\mathbf{l}}{\text{rang } \mathbf{Q}_e} = \frac{d\mathbf{l}^T \mathbf{Q}_e^- d\mathbf{l}}{n} \quad (\text{ki je enaka varianci spremembe vrednosti meritev } s_{dl}^2 - \text{enačba (20)}), \quad (55)$$

kjer je:

$n \dots$ število stranic v trikotniku (= 3).

Sestavimo testno statistiko:

$$T_{22}^2 = \frac{s_e^2}{s^2} \quad (\text{ki je enaka testni statistiki } T_1^2 - \text{enačba (21)}). \quad (56)$$

Testna statistika se porazdeljuje po Fisherjevi porazdelitvi z izbrano stopnjo zaupanja $1 - \alpha$, z f in n prostostnimi stopnjami. Če je vrednost testne statistike manjša ali enaka kritični vrednosti $T_{22}^2 \leq F_{f,n,1-\alpha}$, potem ničelne hipoteze H_0 (22) ne moremo zavrniti in lahko trdimo z verjetnostjo $1 - \alpha$, da trikotnik statistično ni spremenil oblike. Če je vrednost testne statistike večja od kritične vrednosti, potem ničelno hipotezo zavrnemo in lahko trdimo z verjetnostjo $1 - \alpha$, da so se pojavile deformacije v trikotniku.

b2) Ko obravnavamo kotne spremembe v trikotniku, imamo samo dva neodvisna kota – tretji je od njiju odvisen, potem lahko za posamezen trikotnik zapišemo le dve enačbi (43) in sistem (46) še vedno nima rešitve. Matrika \mathbf{H}_e je singularna, njen rang $\mathbf{H}_e = 2$.

c) Če imamo več dolžinskih deformacij in kotnih sprememb, kot je nujno potrebno (na primer tri dolžinske deformacije in tri kotne sprememb v trikotniku), potem imamo več enačb, kot je neznan. Rešitev dobimo z metodo najmanjših kvadratov (Welsch, 1983; Welsch in Zhang, 1983; Mihailović in Aleksić, 1994)

$$\mathbf{e} + \mathbf{v}_e = \mathbf{H}_e \cdot \mathbf{p}_1 \text{ s pripadajočo } \mathbf{P}_e, \quad (57)$$

kjer sta:

\mathbf{v}_e ... vektor popravkov dolžinskih deformacij in kotnih sprememb,

$\mathbf{P}_e = \mathbf{Q}_e^-$... matrika uteži dolžinskih deformacij in kotnih sprememb.

Iz izravnave dobimo:

$$\mathbf{p}_1 = (\mathbf{H}_e^T \mathbf{P}_e \mathbf{H}_e)^{-1} \cdot \mathbf{H}_e^T \mathbf{P}_e \mathbf{e}. \tag{58}$$

Tvorimo kvadratno formo po naslednji enačbi:

$$q_{e+\mathbf{v}_e} = d\mathbf{1}^T \mathbf{Q}_e^- d\mathbf{1} = q_{\mathbf{u}+\mathbf{v}_u} \tag{59}$$

in ne po enačbi $q_{\mathbf{v}_{d1}} = \mathbf{v}_{d1}^T \mathbf{Q}_{d1}^- \mathbf{v}_{d1} = \mathbf{v}_{d1}^T \mathbf{P}_{d1} \mathbf{v}_{d1} = q_{\mathbf{v}_u}$, ki jo zapišejo Welsch (1983) – enačba (32), Welsch in Zhang (1983) – enačba (3–13) ter Mihailović in Aleksić (1994) – enačba med (10.3.17) in (10.3.18), ter varianco popravljenih dolžinskih in kotnih sprememb:

$$s_{\mathbf{p}_1}^2 = \frac{q_{e+\mathbf{v}_e}}{f_{\mathbf{p}_1}} = \frac{d\mathbf{1}^T \mathbf{Q}_e^- d\mathbf{1}}{\text{rang } \mathbf{Q}_e}. \tag{60}$$

Sestavimo testno statistiko:

$$T_{22}^2 = \frac{s_{\mathbf{p}_1}^2}{s^2}. \tag{61}$$

Testna statistika se porazdeljuje po Fisherjevi porazdelitvi z izbrano stopnjo zaupanja $1 - \alpha$, z f in $f_{\mathbf{p}_1}$ prostostnimi stopnjami. Če je vrednost testne statistike manjša ali enaka kritični vrednosti $T_{22}^2 \leq F_{ff_{\mathbf{p}_1}, 1-\alpha}$ potem ničelne hipoteze $H_0(22)$ ne moremo zavrniti in lahko trdimo z verjetnostjo $1 - \alpha$, da trikotnik statistično ni spremenil oblike. Če je vrednost testne statistike večja od kritične vrednosti, potem ničelno hipotezo zavrnemo in lahko trdimo z verjetnostjo $1 - \alpha$, da so se pojavile deformacije v trikotniku.

Rezultati, izračunani z metodo L, naj bi bili identični rezultatom, izračunanim z metodo X.

V tem koraku izračunamo osnovne deformacijske parametre v posameznem trikotniku. V tem koraku tudi ugotovimo, ali so nastale statistično značilne deformacije v trikotniku. Nato spremenimo oblike trikotnikov in ponovimo ta korak (testiranje preoblikovanja geodetske mreže). Tako lahko izračunamo osnovne deformacijske parametre za nekaj različnih oblik trikotnikov v obravnavani geodetski mreži. Na koncu za izbrano geometrijo geodetske mreže izračunamo še druge deformacijske parametre, ki so naslednji korak postopka München.

2.5 Izračun drugih deformacijskih parametrov

Druge deformacijske parametre izračunamo na podlagi osnovnih parametrov z naslednjimi enačbami Welsch (1983); Mihailović in Aleksić (1994); Ašanin (1986); Acar (2010); Labant et al. (2014):

$$\gamma_1 = e_{yy} - e_{xx} \dots \text{čista strižna deformacija,}$$

$$\gamma_2 = 2e_{xy} \dots \text{inženirska strižna deformacija,}$$

$$\Delta = e_{xx} + e_{yy} \dots \text{dilatacija,}$$

$$\text{oz. } \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{xy} \\ e_{yy} \end{bmatrix} \text{ ali } \mathbf{p}_2 = \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{p}_1 \text{ in} \quad (62)$$

$\gamma = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \dots$ skupna strižna deformacija,

$e_1 = \frac{1}{2}(e_{xx} + e_{yy} + ee) = \frac{1}{2}(\Delta + \gamma) \dots$ maksimalna normalna deformacija,

$e_2 = \frac{1}{2}(e_{xx} + e_{yy} - ee) = \frac{1}{2}(\Delta - \gamma) \dots$ minimalna normalna deformacija,

$ee^2 = (e_{xx} - e_{yy})^2 + 4e_{xy}^2$,

$$\text{oz. } \begin{bmatrix} \gamma \\ e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1}{\gamma} & \frac{\gamma_2}{\gamma} & 0 \\ \frac{\gamma_1}{2\gamma} & \frac{\gamma_2}{2\gamma} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\gamma_1}{2\gamma} & -\frac{\gamma_2}{2\gamma} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \Delta \end{bmatrix} \text{ ali } \mathbf{p}_3 = \mathbf{H}_3 \cdot \mathbf{p}_2 \text{ ter} \quad (63)$$

$\tan 2\vartheta = \frac{2e_{xy}}{e_{xx} - e_{yy}} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \dots$ smerni kot maksimalne normalne deformacije,

$\Psi = \vartheta + 45^\circ \dots$ smerni kot maksimalne strižne deformacije.

Po analizi trikotnikov in izračunanih vseh deformacijskih parametrov opravimo za izbrano obliko trikotnikov še zadnji korak postopka München, to je analizo morebitne spremembe položaja posamezne točke v geodetski mreži.

2.5 Analiza posamezne točke

S testiranjem preoblikovanja geodetske mreže, ki jo razdelimo na trikotnike, ugotovimo, kateri trikotniki so statistično značilno spremenili obliko, medtem ko o samih točkah ne vemo veliko. Za odkrivanje točk, ki so se statistično značilno premaknile, testiramo točko po točko glede na preostale $n - 1$ točke geodetske mreže. Testiranje izvedemo s testiranjem sprememb vseh $n - 1$ (datumsko neodvisnih) dolžin, ki povezujejo posamezno točko s sosednjimi točkami (Ašanin, 1986).

Sestavimo ničelno in alternativno hipotezo (Welsch, 1982; Ašanin, 1986):

H_0 : identična točka v obeh izmerah ni spremenila položaja med dvema izmerama in (64)

H_a : identična točka v obeh izmerah je spremenila položaj med dvema izmerama.

Sestavimo testno statistiko (Welsch, 1982; Ašanin, 1986):

$$T_{23}^2 = \frac{\mathbf{dI}^T \mathbf{Q}_d^{-1} \mathbf{dI}}{(n-1)s^2}, \quad (65)$$

kjer so:

$\mathbf{dI} \dots$ vektor razlik dolžin med izbrano točko in preostalimi $n - 1$ točkami geodetske mreže – enačba (12),

$Q_{ei} = LQ_u L^T \dots$ pripadajoča matriko kofaktorjev – enačba (10),

$L = \left[\frac{\partial l}{\partial \hat{x}} \right] \dots$ matrika parcialnih odvodov meritev po koordinatnih neznankah z $n - 1$ vrsticami – enačba (11).

Testna statistika se porazdeljuje po Fisherjevi porazdelitvi z izbrano stopnjo zaupanja $1 - \alpha$, z f in $n - 1$ prostostnimi stopnjami. Če je vrednost testne statistike manjša ali enaka kritični vrednosti $T_{23}^2 \leq F_{f, n-1, 1-\alpha}$, potem ničelne hipoteze H_0 (64) ne moremo zavrniti in lahko trdimo z verjetnostjo $1 - \alpha$, da obravnavana točka ni spremenila položaja med dvema izmerama. Če je vrednost testne statistike večja od kritične vrednosti, potem ničelno hipotezo zavrnemo in lahko trdimo z verjetnostjo $1 - \alpha$, da je obravnavana točka spremenila položaj med dvema izmerama.

3 RAČUNSKI PRIMER

Postopek München uporabimo na podatkih iz literature (Mihailović in Aleksić, 1994). Na istih podatkih smo že preizkusili postopke Hannover (Ambrožič, 2001), Karlsruhe (Ambrožič, 2004), Delft (Marjetič et al., 2012) in Fredericton (Vrečko in Ambrožič, 2013), zato skice mreže, vhodnih podatkov za izravnavi ter izravnanih koordinat točk predhodne in tekoče izmere ne podajamo ponovno. Pri vseh testih izberemo stopnjo značilnosti testa $\alpha = 0,05$.

V prvem koraku postopka München moramo izravnati geodetski mreži kot prosti mreži za vsako terminsko izmero posebej in odkriti morebitno prisotne grobo pogrešene meritve. V preglednici 1 podajamo nekaj rezultatov izravnave, drugi so v Ambrožič (2001), Ambrožič (2004) in Marjetič et al. (2012). Ker smo uporabili simulirane meritve, nimamo prisotnih grobo pogrešenih meritev (glej tudi Marjetič et al., 2012).

Preglednica 1: Rezultati prvega koraka postopka München.

	Predhodna izmera	Tekoča izmera
	$i = 1$	$i = 2$
σ_{d_i}	5 mm	5 mm
σ_{f_i}	1"	1"
$\hat{\sigma}_{0_i}^2 = s_i^2$	0,9699	1,1562
n_i	48	48
u_i	14 + 7	14 + 7
d_i	3	3
f_i	30	30
s^2 ; enačba (3)		1,1387
f ; enačba (3)		60

Drugega koraka ne uporabimo, saj transformacija terminskih izmer v isti geodetski datum ni potrebna, ker primerjamo med seboj geodetski mreži z identičnimi točkami in izmeri, ki se nanašata na isti geodetski datum.

Postopek München nadaljujemo s testiranjem skladnosti obravnavane geodetske mreže, kar je tretji korak postopka. Testiranje skladnosti naredimo z metodama X in L.

Z metodo X izračunamo po enačbi (7) velikost testne statistike $T_1^2 = 141,29$. Ker je testna statistika večja od kritične vrednosti pri izbrani stopnji značilnosti testa ($F_{60,11,0,95} = 1,95$), zavrnilo ničelno hipotezo (4) in trdimo, da je mreža spremenila geometrijo med dvema terminskima izmerama.

Z metodo L izračunamo velikost testne statistike T_1^2 po enačbi (21) na nekaj načinov:

- v mreži upoštevamo samo dolžine: matriko \mathbf{L}_{dD} , velikosti 12×14 (saj imamo v mreži 12 dolžin), sestavimo po enačbi (11), vektor $d\mathbf{I}_{dD}$, velikosti 12×1 , sestavimo po enačbi (12),
- v mreži upoštevamo samo kote: matriko $\mathbf{L}_{d\alpha}$, velikosti 18×14 (saj imamo v mreži 18 kotov), sestavimo po enačbi (13), vektor $d\mathbf{I}_{d\alpha}$, velikosti 18×1 , sestavimo po enačbi (14),
- v mreži upoštevamo dolžine in kote: matriko \mathbf{L} , velikosti 30×14 (saj imamo v mreži 12 dolžin in 18 kotov), sestavimo po enačbi (15), vektor $d\mathbf{I}$, velikosti 30×1 , sestavimo po enačbi (16),

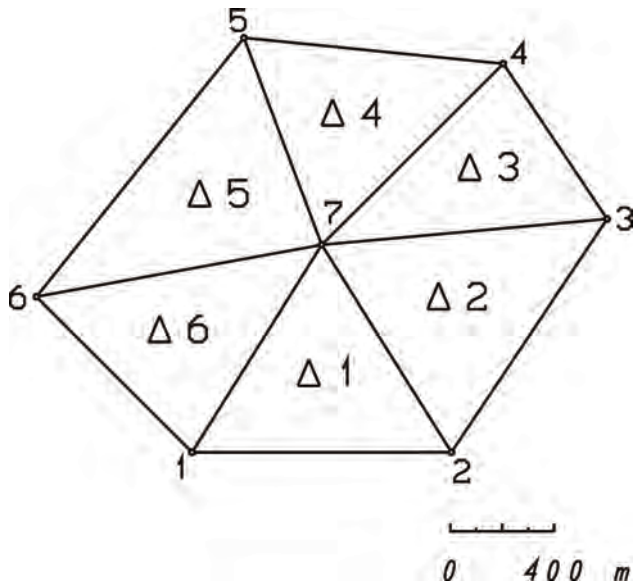
in dobimo po vseh treh načinih enak rezultat $T_1^2 = 141,29$ kot z metodo X. Ničelno hipotezo (4) seveda zavrnilo in trdimo, da je mreža spremenila geometrijo med dvema terminskima izmerama. Testna statistika T_1^2 je enaka globalnemu testu stabilnosti točk mreže v dveh izmerah v metodi Hannover (Ambrožič, 2001).

V četrtem koraku postopka München testiramo preoblikovanje geodetske mreže, izračunamo torej deformacije. Geodetsko mrežo razdelimo na trikotnike in testiramo vsakega zase.

Za izračun deformacij z metodo X tvorimo matriko \mathbf{H}_u – enačba (31) velikosti 6×6 (saj imamo v trikotniku tri točke s šestimi koordinatami), z njo izračunamo najprej deformacijske parametre po enačbi (33) in nato testno statistiko po enačbi (36). Rezultate obravnave prve geometrije trikotnikov podajamo v preglednici 2, sliko prve geometrije trikotnikov pa na sliki 1. Izračunamo tudi kritično vrednost $F_{60,3,0,95} = 2,76$ in jo primerjamo s testnimi statistikami. Ker so vrednosti testnih statistik v vseh trikotnikih večje od kritične vrednosti, ničelno hipotezo (22) zavrnilo in trdimo, da so se pojavile deformacije v vseh trikotnikih.

Preglednica 2: Deformacijski parametri, testna statistika in odločitev o zavrnitvi ničelne hipoteze (22) z uporabo metode X, ko obravnavamo prvo geometrijo trikotnikov.

	$\Delta 1$	$\Delta 2$	$\Delta 3$	$\Delta 4$	$\Delta 5$	$\Delta 6$
e_{xx} [10^{-6}]	46,19	- 54,19	20,50	- 57,46	- 39,65	86,78
e_{yy} [10^{-6}]	76,48	- 0,77	- 57,18	- 17,02	11,85	33,96
e_{xy} [10^{-6}]	- 18,70	- 8,92	0,71	- 1,65	25,68	13,46
ω ["]	- 4,0	13,2	3,0	- 4,8	- 8,7	0,6
t_x [m]	- 0,186	0,235	0,111	0,135	0,031	- 0,162
t_y [m]	- 0,049	- 0,075	0,102	0,101	0,041	- 0,061
T_{21}^2	336,48	62,03	116,79	95,96	56,68	229,98
H_0	zavrnjena	zavrnjena	zavrnjena	zavrnjena	zavrnjena	zavrnjena



Slika 1: Razpored trikotnikov v prvi geometriji geodetske mreže.

Enake vrednosti deformacijskih parametrov izračunamo, če uporabimo enačbo (38). Testna statistika po (41) je enaka testni statistiki (36).

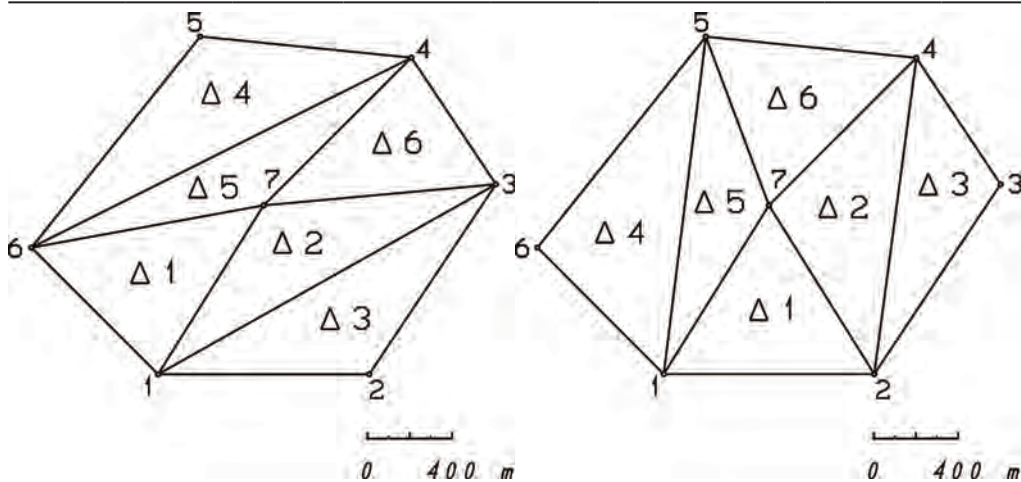
Izračun deformacij z metodo L naredimo na več načinov:

- v trikotniku upoštevamo samo dolžinske deformacije: deformacijske parametre \mathbf{p}_1 v enačbi (52) izračunamo z enačbo (53), tako da matriko $\mathbf{H}_e = \mathbf{H}_{e_e}$ velikosti 3×3 (saj imamo v trikotniku tri dolžine) sestavimo po enačbi (50), vektor $\mathbf{e} = \mathbf{e}_e$ velikosti 3×1 sestavimo po enačbi (48), testno statistiko T_{22}^2 pa po enačbi (56) – za posamezen trikotnik izračunamo deformacijske parametre in testno statistiko enake vrednosti kot z metodo X, kar prikazujemo v preglednici 2,
- v trikotniku upoštevamo samo kotne spremembe: treh deformacijskih parametrov \mathbf{p}_1 za posamezen trikotnik ne moremo izračunati, saj imamo v trikotniku samo dve neodvisni kotni spremembi v enačbi (49),
- v trikotniku upoštevamo dolžinske deformacije in kotne spremembe: če sestavimo matriko \mathbf{H}_e iz obeh delov \mathbf{H}_{e_e} (50) in $\mathbf{H}_{e_{d\alpha}}$ (51), je $\mathbf{H}_e = [\mathbf{H}_{e_e} \quad \mathbf{H}_{e_{d\alpha}}]^T$ velikosti 6×3 (saj imamo v trikotniku tri dolžine in tri kote), vektor \mathbf{e} prav tako iz obeh delov \mathbf{e}_e (48) in $\mathbf{e}_{d\alpha}$ (49), izračunamo deformacijske parametre z enačbo (58), testno statistiko pa po enačbi (61) – za posamezen trikotnik izračunamo deformacijske parametre in testno statistiko enake vrednosti kot z metodo X, kar prikazujemo v preglednici 2.

Trikotnike v geodetski mreži tvorimo še na več različnih načinov, v nadaljevanju prikazujemo na sliki 2 le dve geometriji trikotnikov, rezultate obravnave druge in tretje geometrije trikotnikov podajamo v preglednici 3. Ker sta trikotnika 1 in 6 v drugi geometriji enaka trikotnikoma 6 in 3 v prvi geometriji ter trikotnika 1 in 6 v tretji geometriji enaka trikotnikoma 1 in 4 v prvi geometriji, rezultatov ponavljajočih se trikotnikov v preglednici 3 ne prikazujemo.

Preglednica 3: Deformacijski parametri, testna statistika in odločitev o zavrnitvi ničelne hipoteze (22) z metodo X, ko obravnavamo drugo in tretjo geometrijo trikotnikov.

	Druga geometrija				Tretja geometrija			
	$\Delta 2$	$\Delta 3$	$\Delta 4$	$\Delta 5$	$\Delta 2$	$\Delta 3$	$\Delta 4$	$\Delta 5$
e_{xx} [10^{-6}]	158,66	-161,27	-5,80	-140,75	-28,08	-14,58	26,76	2,38
e_{yy} [10^{-6}]	-16,92	82,79	0,43	-4,02	1,59	-58,59	-12,01	79,05
e_{xy} [10^{-6}]	-7,75	-18,70	1,32	34,79	-68,24	75,42	-18,44	85,25
ω ["]	13,8	-2,7	-2,3	-15,7	5,1	13,5	3,5	-17,9
t_x [m]	-0,119	0,021	-0,006	0,186	0,126	0,315	-0,042	-0,212
t_y [m]	-0,053	-0,062	0,020	0,118	0,081	-0,187	0,003	-0,088
T_{22}^2	278,24	286,17	0,37	98,21	110,69	136,29	33,96	249,07
H_0	zavrjnena	zavrjnena	NI zavrjnena	zavrjnena	zavrjnena	zavrjnena	zavrjnena	zavrjnena



Slika 2: Razpored trikotnikov v drugi in tretji geometriji geodetske mreže.

Na podlagi rezultatov, podanih v preglednicah 2 in 3, lahko ugotovimo, da četrti trikotnik v drugi geometriji geodetske mreže statistično ni spremenil oblike med obravnavanima izmerama.

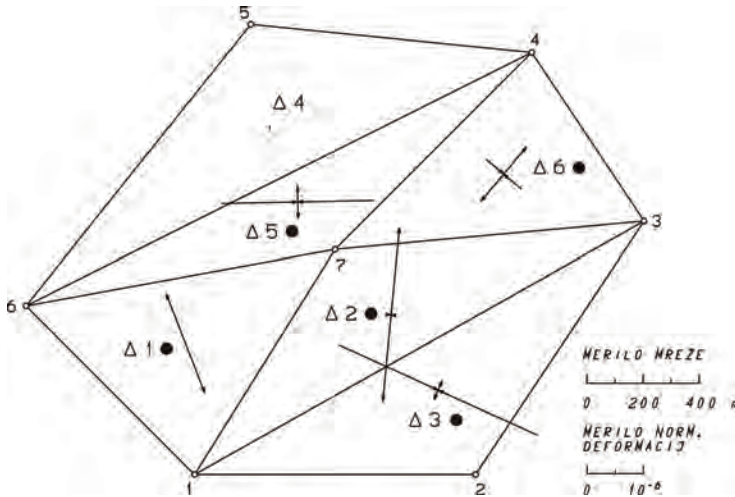
Preglednica 4: Drugi deformacijski parametri za drugo geometrijo geodetske mreže.

	$\Delta 1$	$\Delta 2$	$\Delta 3$	$\Delta 4$	$\Delta 5$	$\Delta 6$
γ_1 [10^{-6}]	-73,32	-166,41	142,57	7,12	175,54	-19,79
γ_2 [10^{-6}]	67,91	-33,84	165,59	0,86	-8,05	-114,36
Δ [10^{-6}]	100,24	150,92	-179,97	-4,47	-105,95	21,21
γ [10^{-6}]	99,94	169,82	218,51	7,17	175,72	116,06
e_1 [10^{-6}]	100,09	160,37	19,27	1,35	34,89	68,63
e_2 [10^{-6}]	0,15	-9,45	-199,24	-5,82	-140,84	-47,42
ϑ [°]	159	5	24	3	179	40
Ψ [°]	24	50	69	48	44	85

V naslednjem, petem, koraku postopka München izračunamo še druge deformacijske parametre za drugo

geometrijo geodetske mreže, ki jih podajamo v preglednici 4.

Na sliki 3 grafično prikazujemo normalne deformacije za drugo geometrijo geodetske mreže (Talich, 2007). V trikotnikih, kjer se je oblika med obravnavanima izmerama statistično značilno spremenila, smo narisali piko – tako je trikotnike označil tudi avtor postopka (Welsch, 1982; Welsch, 1983; Welsch in Zhang, 1983).



Slika 3: Normalne deformacije v drugi geometriji geodetske mreže.

V zadnjem koraku opravimo analizo posamezne točke tako, da ugotovimo, ali se je točka statistično značilno premaknila. Izračunamo testne statistike (65) za posamezno točko glede na preostale $n - 1$ točke (izračunamo torej toliko testnih statistik, kolikor dolžin lahko izračunamo do posamezne točke). Za posamezen izračun testnih statistik imamo v vektorju \mathbf{d} in matriki \mathbf{L} le eno vrstico. Zapišemo jih v preglednico 5.

Preglednica 5: Testna statistika T_{23}^2 – enačba (65) med dvema točkama.

Točka	1	2	3	4	5	6	7
1	–	19,89	49,38	87,04	64,84	10,05	689,26
2	19,89	–	109,74	84,02	163,39	113,96	113,61
3	49,38	109,74	–	124,81	62,37	10,41	9,20
4	87,04	84,02	124,81	–	0,08	0,01	186,39
5	64,84	163,39	62,37	0,08	–	0,63	83,12
6	10,05	113,96	10,41	0,01	0,63	–	77,68
7	689,26	113,61	9,20	186,39	83,12	77,68	–

Testna statistika je med točko i in j enaka testni statistiki med j in i . Izračunamo tudi kritično vrednost $F_{60,1,0,95} = 4,00$ in jo primerjamo s testnimi statistikami v preglednici 5. Ker so le tri testne statistike manjše od kritične vrednosti (to so tiste, ki jih izračunamo med točkama 4 in 5, 4 in 6 ter 5 in 6), ne moremo zavrniti ničelne hipoteze (64) in trdimo, da te tri točke 4, 5 in 6 niso spremenile položaja med obravnavanima izmerama.

Če nadaljujemo analizo posameznih točk in izračunamo testne statistike (65) med točkami 5 1 6, 5 2 6, 5 3 6, 5 4 6 in 5 7 6 (za posamezen izračun testnih statistik imamo v vektorju $d\mathbf{I}$ in matriki \mathbf{L} le dve vrstici), dobimo za vse kombinacije testne statistike, večje od kritične vrednosti $F_{60,2,0,95} = 3,15$, le za kombinacijo med točkami 5 4 6 izračunamo $T_{23}^2 = 0,34$, kar je manj od kritične vrednosti. Le za to kombinacijo točk ne moremo zavrniti ničelne hipoteze (64) in trdimo, da tri točke 4, 5 in 6 niso spremenile položaja med obravnavanimi izmerama.

4 PRIMERJAVA REZULTATOV POSTOPKA MÜNCHEN Z REZULTATI DRUGIH POSTOPKOV

Obravnavan računski primer primerjamo tudi z drugimi postopki deformacijske analize. Rezultate podajamo v preglednici 6, ki je povzeta po Vrečko in Ambrožič (2013). Dodajamo rezultate postopka München.

Preglednica 6: Rezultati deformacijske analize po postopkih Hannover, Karlsruhe, Delft, Fredericton in München.

		Točka	1	2	3	4	5	6	7
Simulirano	d_y [mm]	-20,0	-30,0	25,0	0,0	0,0	0,0	0,0	25,0
	d_x [mm]	-34,6	52,0	-43,3	0,0	0,0	0,0	0,0	43,3
	d [mm]	40,0	60,0	50,0	0,0	0,0	0,0	0,0	50,0
	ν [°]	210	330	150	-	-	-	-	30
Hannover	d_y [mm]	-19,6	-38,7	20,6	-4,0	-6,4	3,3	23,6	
	d_x [mm]	-38,0	49,0	-44,3	5,1	-7,1	-10,6	42,9	
	d [mm]	42,8	62,4	48,9	6,5	10,0	11,1	49,0	
	ν [°]	207	322	155	322	222	163	29	
	Premik	da	da	da	ne	ne	ne	da	
Karlsruhe	d_y [mm]	-19,7	-38,8	20,6	-	-	-	23,6	
	d_x [mm]	-38,0	49,0	-44,4	-	-	-	42,9	
	d [mm]	42,8	62,5	48,9	-	-	-	49,0	
	ν [°]	207	322	155	-	-	-	29	
	Premik	da	da	da	ne	ne	ne	da	
Delft	d_y [mm]	-19,4	-38,1	21,4	0,7	-0,8	0,0	24,0	
	d_x [mm]	-37,5	49,5	-43,5	1,0	-2,3	1,3	42,9	
	d [mm]	42,2	62,5	48,5	1,2	2,4	1,3	49,2	
	ν [°]	207	322	154	35	199	0	29	
	Premik	da	da	da	ne	ne	ne	da	
Fredericton	d_y [mm]	-19,6	-38,7	20,6	-	-	-	23,6	
	d_x [mm]	-38,0	49,0	-44,3	-	-	-	42,9	
	d [mm]	42,8	62,5	48,9	-	-	-	48,9	
	ν [°]	207	322	155	-	-	-	29	
	Premik	da	da	da	ne	ne	ne	da	
München	d_y [mm]	-19,5	-38,2	21,4	0,7	-0,8	0,0	24,0	
	d_x [mm]	-37,6	49,5	-43,6	1,0	-2,2	1,4	42,9	
	d [mm]	42,4	62,5	48,6	1,2	2,3	1,4	49,2	
	ν [°]	207	322	154	35	200	0	29	
	Premik	da	da	da	ne	ne	ne	da	

Rezultate postopka München izračunamo tako, da obe izmeri transformiramo s transformacijo S v isti geodetski datum, ki ga določajo točke 4, 5 in 6 (saj smo v četrtem koraku ugotovili, da četrti trikotnik v drugi geometriji geodetske mreže, ki ga sestavljajo točke 4, 5 in 6, statistično ni spremenil oblike med obravnavanima izmerama in v šestem koraku potrdili, da te tri točke niso spremenile položaja med obravnavanima izmerama) ter izračunamo premike točk. Iz preglednice 6 vidimo, da so premiki, določeni po vseh postopkih, zelo podobni. Razlike med njimi so reda velikosti nekaj desetink milimetra za posamezno koordinatno komponento.

5 SKLEP

Deformacijska analiza po postopku München zaokrožuje serijo petih postopkov, ki jih je predlagala skupina za poenotenje postopkov, ustanovljena v okviru 6. komisije na II. kongresu deformacijskih merjenj v sklopu FIG v Bonnu (Chrzanowski et al., 1986). V članku podrobno opisujemo postopek deformacijske analize po postopku München, ki vsebuje izravnavo geodetske mreže z odkrivanjem grobih pogreškov, transformacijo terminskih izmer v isti datum, testiranje skladnosti in nato preoblikovanje trikotnikov po obeh pristopih – metodi X in metodi L med obravnavanima izmerama, izračun deformacijskih parametrov in določitev stabilnosti točk geodetske mreže. V članku obravnavamo skladnost in deformacije posameznih trikotnikov, ki jih sestavljajo geodetske točke. V literaturi (Welsch in Zhang, 1983; Mihailović in Aleksić, 1994) sicer obravnavajo in izračunajo deformacijske parametre vseh trikotnikov hkrati, vendar morajo pri sestavljanju enačb uporabiti določene pogoje, kar se nam zdi nepraktično (kot pogojna izravnavo nadštevilnih meritev).

Rezultati petih postopkov, ki jih medsebojno primerjamo v poglavju 4 na simuliranem primeru, se le nekoliko razlikujejo med seboj. Predvidevamo, da bi večje razlike med rezultati postopkov nastale, če bi obravnavali realne premike točk geodetskih mrež, pri katerih bi imeli tako manjše kot večje premike točk med obravnavanimi izmerami.

Literatura in viri:

- Acar, M. (2010). Determination of strain accumulation in landslide areas with GPS measurements. *Scientific Research and Essays*, 5 (8), 763–768.
- Ambrožič, T. (1996). Ocena stabilnosti točk v geodetski mreži. Magistrska naloga. Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.
- Ambrožič, T. (2001). Deformacijska analiza po postopku Hannover. *Geodetski vestnik*, 45 (1-2), 38–53.
- Ambrožič, T. (2004). Deformacijska analiza po postopku Karlsruhe. *Geodetski vestnik*, 48 (3), 315–331.
- Ašanin, S. (1986). Prilog obradi i analizi geodetskih merjenja za odredjivanje pomeranja i deformacija objekta i tla. Doktorska disertacija. Beograd: Univerzitet u Beogradu, Gradjevinski fakultet, Institut za geodeziju.
- Caspary, W. F. (1988). *Concepts of Network and Deformation Analysis*. Kensington: The University of New South Wales, School of Surveying.
- Chrzanowski, A., Chen, Y. Q., Secord, J. M. (1986). Geometrical analysis of deformation surveys. V: Y. Bock (ur.), *Proceedings of the Deformation Measurements Workshop*, 31 October–1 November, Boston (str. 170–206). Boston: Massachusetts Institute of Technology.
- Deniz, I., Ozener, H. (2010). Estimation of strain accumulation of densification network in Northern Marmara Region. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 10, 2135–2143. DOI: <https://doi.org/10.5194/nhess-10-2135-2010>, 2010
- Grigillo, D., Stopar, B. (2003). Metode odkrivanja grobih pogreškov v geodetskih opazovanjih. *Geodetski vestnik*, 47 (4), 387–403.
- Labant, S., Weiss, G., Zuzik, J., Baran, M. (2014). Graphical interpretation deformation analysis of stability area using of strain analysis. *Acta Montanistica Slovaca*, 19 (1), 31–40.
- Marjetič, A., Stopar, B. (2007). Geodetski datum in S -transformacija. *Geodetski vestnik*, 51 (3), 549–564.
- Marjetič, A., Zemljak, M., Ambrožič, T. (2012). Deformacijska analiza po

- postopku Delft. Geodetski vestnik, 56 (1), 9–26. DOI: <https://doi.org/10.15292/geodetski-vestnik.2012.01.009-026>
- Van Mierlo, J. (1978). A testing procedure for analysing geodetic deformation measurements. V: L. Hallermann (ur.), Proceedings of the II. International Symposium on Deformation Measurements by Geodetic Methods, Bonn, Germany (str. 321–353). Stuttgart: Konrad Wittwer.
- Mihailović, K., Aleksić, I. (1994). Deformaciona analiza geodetskih mreža. Beograd: Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet, Institut za geodeziju.
- Plestenjak, B. (2015). Razširjen uvod v numerične metode. Ljubljana: DFMA – založništvo.
- Sušić, Z., Batilović, M., Ninkov, T., Aleksić, I., Bulatović, V. (2015). Identification of movements using different geodetic methods of deformation analysis (Identifikacija premikov z uporabo različnih geodetskih metod deformacijske analize). Geodetski vestnik, 59 (3), 537–553. DOI: <https://doi.org/10.15292/geodetski-vestnik.2015.03.537-553>
- Sušić, Z., Toljić, M., Bulatović, V., Ninkov, T., Stojadinović, U. (2016a). Present-day horizontal mobility in the Serbian part of the Pannonian basin; Inferences from the geometric analysis of deformations. Acta Geophysica, 64 (5), 1626–1654. DOI: <https://doi.org/10.1515/acgeo-2016-0074>
- Sušić, Z., Ninkov, T., Batilović, M., Bulatović, V. (2016b). Primena geometrijske analize deformacionih merenja u praćenju geodinamičkih procesa. V: R. Folić (ur.), 5. međunarodno naučno-stručno savetovanje „Zemljotresno inženjerstvo i inženjerska seizmologija“, Sremski Karlovci (str. 471–478). Beograd: Savez građevinskih inženjera Srbije.
- Sušić, Z., Batilović, M., Ninkov, T., Bulatović, V., Aleksić, I., Nikolić, G. (2017). Geometric deformation analysis in free geodetic networks: case study for Fruška Gora in Serbia. Acta Geodynamica et Geomaterialia, 14 (3), 341–355. DOI: <https://doi.org/10.13168/AGG.2017.0017>
- Talich, M. (2007). Geometrical analysis of deformation measurement using continuum mechanics by web application. V: Strategic Integration of Surveying Services. The XXX FIG General Assembly and Working Week 2007, Hong Kong SAR, China (str. 1–13).
- Vrce, E. (2011). Deformacijska analiza mikrotriangulacijske mreže. Geodetski glasnik, 45 (40), 14–27.
- Vrečko, A., Ambrožič, T. (2013). Deformacijska analiza po postopku Fredericton. Geodetski vestnik, 57 (3), 479–497. DOI: <https://doi.org/10.15292/geodetski-vestnik.2013.03.479-497>
- Welsch, W. (1982). Einige Erweiterungen der Deformationsermittlung in geodätischen Netzen durch Methoden der Strainanalyse. V: I. Joó (ur.), A. Detrekői (ur.), Proceedings of the 3rd International Symposium on Deformation Measurements by Geodetic Methods, Budapest (str. 83–97). Budapest: Akademiai Kiadó.
- Welsch, W. (1983). Finite element analysis of strain patterns from geodetic observations across a plate margin. Tectonophysics, 97, 57–71.
- Welsch, W., Zhang, Y. (1983). Einige Methoden zur Untersuchung kongruenter und affiner Beziehungen in geodätischen Überwachungsnetzen zur Ermittlung von Deformationen. V: W. Welsch (ur.), Deformationsanalysen '83, Geometrische Analyse und Interpretation von Deformationen Geodätischer Netze. Beiträge zum Geodätischen Seminar 22. April 1983,



Soldo J., Ambrožič T. (2018). Deformacijska analiza po postopku München, 62 (3), 392–414.
DOI: <https://doi.org/10.15292/geodetski-vestnik.2018.03.392-414>

Jure Soldo, univ. dipl. inž. geod.
Javno podjetje Komunala Slovenj Gradec d.o.o.
Pameče 177a, SI-2380 Slovenj Gradec
e-naslov: jure.soldo@komusg.si

Izr. prof. dr. Tomaž Ambrožič, univ. dipl. inž. geod., univ. dipl. inž. rud.
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo
Jamova cesta 2, SI-1000 Ljubljana
e-naslov: tomaz.ambrozic@fgg.uni-lj.si