

# MODELIRANJE 3D-PLOSKEV Z NEVRONSKIMI MREŽAMI Z RADIALNIMI BAZNIMI AKTIVACIJSKIMI FUNKCIJAMI

# THE EMPLOYMENT OF A RADIAL BASIS FUNCTION NETWORK FOR 3D SURFACE MODELLING

*Polona Pavlovčič Prešeren, Bojan Stopar, Oskar Sterle*

UDK: 528.22:004.032.26  
Klasifikacija prispevka po COBISS.SI: 1.01  
Prispelo: 21. 3. 2016  
Sprejeto: 10. 6. 2016

DOI: 10.15292/geodetski-vestnik.2016.02.241-255  
SCIENTIFIC ARTICLE  
Received: 21. 3. 2016  
Accepted: 10. 6. 2016

## IZVLEČEK

Določitev matematičnega modela ploskve temelji na naboru diskretno pridobljenih prostorskih podatkov, ki jih nadalje uporabimo za predstavitev zvezne ploskve. Za določitev funkcij za opis ploskev navadno uporabljamo različne interpolacijske ali aproksimacijske metode. V prispevku opisujemo modeliranje ploskev z nevronskimi mrežami z radialnimi baznimi aktivacijskimi funkcijami. Pri reševanju problema z nevronskimi mrežami je pristop nekoliko drugačen. Tu gre za učenje mreže na znanih diskretnih vhodno-izhodnih parih podatkov, da mreža določi lastno funkcijo za modeliranje ploskve. To uporabimo za izračun višin tudi v točkah, ki niso bile vključene v fazo učenja. V prispevku opisujemo, kako smo za rešitev problema aproksimacije zvezne ploskve uporabili nevronsko mrežo z enim skritim slojem nevronov, in uporabo različnih radialnih baznih funkcij za aktivacijo nevronov skritega sloja. Na študijskem primeru podatkov smo pokazali, da obstajajo razlike v kakovosti modeliranja višinske ploskve ob uporabi različnih aktivacijskih funkcij nevronske mreže. Medtem ko nam z nevronsko mrežo z Gaussovo aktivacijsko funkcijo ni uspelo modelirati ploskve z želeno natančnostjo, smo bili z izborom poliharmoničnega zlepk za aktivacijsko funkcijo veliko uspešnejši.

## KLJUČNE BESEDE

višinska ploskev, interpolacija, aproksimacija, nevronske mreže, radialne bazne aktivacijske funkcije, vzvratno razširjanje napake, psevdoinverzija

## ABSTRACT

Determination of the mathematical model of elevation computation is based on a discrete data set, which could be used for elevation modelling. Usually, interpolation or approximation techniques are used for function determination. We describe an aspect of radial basis function networks employment in a smooth surface representation using a sample of discrete 3D positional input-output data pairs. In this article we present a different solution using a neural network, which is trained upon given discrete input-output data pairs and uses radial basis functions for activation in hidden layer. Radial basis function network surface approximation is based on a single hidden-layer structure and uses pseudo-inversion as an alternative to back-propagation learning algorithm to obtain optimal weights. Radial basis function network determines its own specific model for continuous function representation. In case study, we have shown that differences in quality surface modelling upon several activation functions exist. While using Gaussian activation function we have not reached desired results, the use of poly-harmonic lead to much more successful surface modelling results.

## KEY WORDS

elevation model, interpolation, approximation, neural networks, radial basis activation functions, back-propagation, pseudo-inversion

## 1 UVOD

Določitev funkcij, ki opisujejo razmerje med danimi diskretnimi vhodno-izhodnimi pari podatkov, je splošna težava pri modeliranju katere koli vrste podatkov. Čeprav današnje tehnologije omogočajo pridobivanje diskretnih podatkov z vedno višjo gostoto, te še vedno obravnavamo kot diskretne spremenljivke, ki jih z različnimi postopki modeliranja uporabimo za določitev zveznih funkcij. V danem primeru smo se omejili na določitev funkcije za izračun višinske ploskve iz diskretnih podatkov, da lahko na obravnavanem definicijskem območju z ustrežno natančnostjo izračunamo višino katere koli točke z znanim položajem v horizontalni ravnini. Opredelitev kakovosti izračuna s posamezno metodo zunaj točk celične mreže je pomembna, kar navaja tudi Kosmatin-Fras (2004) v povezavi z digitalnim modelom višin (DMV).

Predstavitve modela višin lahko poteka z determinističnimi metodami, pri katerih se za izračun vrednosti funkcij na posameznih lokacijah uporabljajo matematične funkcije. Lokalne metode se uporabljajo za interpolacijo vrednosti glede na stopnjo podobnosti med sosednjimi točkami (Šumrada, 2005). Med te uvrščamo metodo naravnih sosedov, metodo z inverzno razdaljo, metodo trenda in *kriginga* kot tudi radialne bazne funkcije, ki jih ne smemo enačiti z nevronske mreže z radialnimi baznimi aktivacijskimi funkcijami. Model površja lahko nadalje predstavimo s pravilno kvadratno ali pravokotno mrežo, tako kot je predstavljen digitalni model višin (kvadratna mreža) ali model geoida (pravokotna mreža). Vse navedene metode temeljijo na matematični razrešitvi problema modeliranja zveznih ploskev in so že vključene v programske pakete (npr. *ArcGis*, *Surfer* ...). Če je območje razgibano in so točke naključno razpršene, ga lahko predstavimo s trikotniško mrežo (Thiessenovi poligoni in Delaunayev algoritem za določitev trikotnikov). Šumrada (2005) govori o uporabnosti Thiessonovih poligonov in Delaunayev triangulacije za primere razpršenih točk, saj metodi omogočata enostavno vzpostavitev povezave položaja točke z njenim vplivnim območjem. Vse navedene metode se ne izkažejo najbolje, ko je na posameznih območjih manj podatkov oziroma so podatki slabše kakovosti. Metode namreč temeljijo na geometričnem pristopu razrešitve problema, kjer postavimo zahtevo, da imamo na voljo dovolj kakovostnih podatkov za modeliranje.

Že nekaj časa je znano tudi drugačno modeliranje funkcij, in sicer z uporabo umetnih nevronske mreže. Različni avtorji (McCulloch in Pitts, 1943; Hebb 1949; Rosenblatt, 1958; Hopfield, 1982, Hornik et al., 1989) so utemeljili in empirično pokazali prednost uporabe umetnih nevronske mreže pri reševanju problema določitve zveznih funkcij. Pokazali so, da nevronske mreže obdržijo lastnost univerzalne aproksimacije (Cybenko, 1989; Hornik et al. 1989). Koncept določitve zvezne ploskve z uporabo nevronske mreže temelji na preprostem preslikovanju vhodno-izhodnih parov podatkov, kjer preslikovanje poteka po vnaprej določeni strukturi. Struktura in način učenja posamezne nevronske mreže sta opredeljena s tipom nevronske mreže. Pri uporabi nevronske mreže eksplicitno enačbo za izračun funkcije  $f$  (na primer pri determinističnih metodah) nadomešča model, ki ga pridobimo z učenjem. Na danih vhodno-izhodnih parih podatkov umetne nevronske mreže ne programiramo po algoritmih, ampak jo učimo. Če izberemo pravilno strukturo in način učenja, lahko z uporabo nevronske mreže pridobimo model izračuna funkcije, v našem primeru višinske ploskve, ki prav tako kot lokalne deterministične metode temelji na upoštevanju podobnosti podatkov med sosednjimi točkami. Z uporabo umetnih nevronske mreže modele ploskev pridobimo z aproksimacijo in le v posebnih strukturah z interpolacijo. Kot zelo uspešen primer mode-

liranja zvezne ploskve naj omenimo modeliranje geoida z večslojno nevronske mreže (angl. *multilayer feed-forward network*) (Ambrožič et al., 1999), kasneje je Derenda (2007) z nevronske mreže uspešno aproksimiral referenčno višinsko ploskev. Nevronske mreže z radialnimi baznimi funkcijami smo uspešno uporabili pri aproksimaciji zvezne tirnice gibanja umetnih satelitov (Pavlovčič Prešeren in Stopar, 2009).

V prispevku želimo pokazati, da je mogoče tudi z drugačnimi strukturami nevronske mreže modelirati zvezno ploskev iz diskretnih podatkov. Pri tem rešujemo problem aproksimacije ploskve z nevronske mreže z radialnimi baznimi funkcijami (angl. *radial basis function networks*). Nevronske mreže so se izkazale kot učinkovito orodje, ko so podatki obremenjeni s šumom. Izbor nevronske mreže z radialnimi baznimi funkcijami v skritem sloju ni bil naključen, ampak je potekal na optimizaciji postopka učenja, najprej, da bi pospešili hitrost učenja, nadalje, da bi zmanjšali možnost neuspešnega učenja, in nazadnje, da bi lahko modelirali ploskev, tudi če so podatki obremenjeni s šumom.

V drugem poglavju podrobno opišemo nevronske mreže z radialnimi baznimi aktivacijskimi funkcijami, s poudarkom na drugačnem učnem algoritmu, kot je zelo pogosto uporabljeno vzvratno razširjanje napake (angl. *backpropagation*). Podrobno predstavimo nekatere radialne bazne funkcije, ki izpolnjujejo pogoj uporabe v skritem sloju nevronske mreže. V tretjem poglavju predstavimo uporabo različnih radialnih nevronske mreže na primeru diskretnih podatkov, za katere želimo pridobiti zvezno funkcijo. Predstavimo učinkovitost uporabe posameznega tipa radialnih nevronske mreže na primeru istih vhodno-izhodnih parov podatkov. V četrtem poglavju podrobneje komentiramo rezultate različnih testov, ki smo jih naredili na študijskem primeru podatkov. Nazadnje v petem poglavju predstavimo bistvene značilnosti uporabe radialnih nevronske mreže v dani situaciji s kritično oceno uporabe posamezne metode.

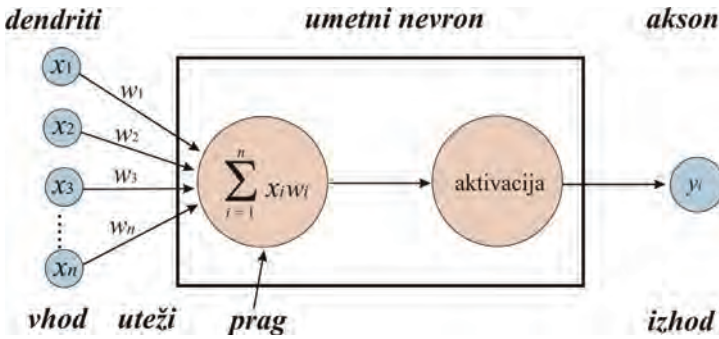
## 2 NEVRONSKE MREŽE

Za lažje razumevanje delovanja umetnih nevronske mreže in predvsem zato, da bo v nadaljevanju lažje izpostaviti prednosti nevronske mreže z radialnimi baznimi aktivacijskimi funkcijami, opisujemo osnovno strukturo katere koli umetne nevronske mreže. V splošnem z umetnimi nevronske mrežami matematično opisujemo računski model, ki deluje podobno, a precej bolj preprosto kot človeški možgani (Ambrožič et al., 1999). Model sestavljajo sloji nevronov, ki so med seboj zaporedno povezani. Vsak nevron naslednjega sloja je povezan z vsemi nevroni prejšnjega sloja. Povezave matematično predstavljamo s sinaptičnimi utežmi. Model med učenjem na izbranih učnih podatkih in rezultatih (znani so vhodni podatki in izhodni rezultati) pridobiva znanje, ki je izhodišče, da lahko kasneje pridobi rezultate za poljubne podatke. Strukturo nevronske mreže s sloji nevronov predstavljamo na sliki 1. V vhodnem sloju so vhodni podatki ( $x_1, \dots, x_n$ ) in v izhodnem rezultati ( $y_1, \dots, y_m$ ). Na sliki 1 predstavljamo delovanje enega nevronske mreže z enim izhodom, čeprav jih je lahko tudi več. Vhodi v nevronske mreže  $x_j$ , ki predstavljajo dendrite biološkega nevronske mreže, so ojačani z utežmi  $w_i$ . Če obstaja več vhodov in več nevronov v skritem sloju, uteži različnih povezav nevronske mreže zapišemo kot  $w_{ij}$ . Vsota vhodov, ki jih pomnožimo z ustreznimi utežmi, predstavlja vhod v aktivacijsko funkcijo, ki določi jakost izhoda nevronske mreže.

Umetni nevron opišemo z enačbama (Ambrožič et al., 1999):

$$u_k = \sum_{i=1}^n w_{ki} x_i, y_k = \phi(u_k - \theta_k), \text{ za } k = 1, 2, \dots, m \quad (1)$$

kjer je  $u_k$  aktivacija,  $\phi(\cdot)$  aktivacijska funkcija in  $\theta_k$  pragovna vrednost, ko se sproži nevron.



Slika 1: Osnovna struktura nevronske mreže in analogija z biološkim nevronom (vhodni dendriti, nevron in izhodni akson).

Nevronske mreže se po strukturi ločijo po številu vmesnih ali skritih slojev nevronov. Govorimo o večslojnih nevronskih mrežah, pri čemer ima trislojna mreža le en skriti sloj. Nevronske mreže ločimo tudi glede na uporabljeno aktivacijsko funkcijo. Ko določimo strukturo nevronske mreže, jo v nadaljevanju učimo. Poznamo več vrst učenja, na primer prilaganje uteži določeni strukturi nevronske mreže, prilagajamo lahko obliko izbrane aktivacijske funkcije ali spreminjamo število nevronov v posameznem skritem sloju. V nekaterih primerih učenje poteka s povratnimi zankami, kar pomeni, da poteka od vhodnega prek skritih do izhodnega sloja, čemur sledi popravljanje uteži v nasprotni smeri. Pri specifičnih strukturah nevronskih mrež učenje poteka le od vhodnega prek skritih slojev do izhodnega sloja, kar imenujemo učenje brez povratne zanke. Tako učenje vključujejo tudi nevronske mreže z radialnimi baznimi aktivacijskimi funkcijami.

Nevronska mreža temelji na preslikovanju znanih vhodno-izhodnih parov podatkov. Če so v vektorju  $\mathbf{x}$  vključeni vhodni podatki in v vektorju  $\mathbf{y}$  izhodni podatki ter je  $n$  število vhodno-izhodnih parov podatkov, ki so vključeni v učenje:

$$x_i \in \mathbb{R}^n \text{ in } y_i \in \mathbb{R}^1, \text{ kjer je: } i = 1, 2, \dots, n,$$

z nevronske mreže iščemo neznano funkcijo, ki se v vsaki točki skuša približati pogoju:

$$f(x_i) = y_i. \quad (2)$$

Splošno ob uporabi nevronskih mrež pogoja (2) ne moremo izpolniti, zato govorimo o aproksimaciji funkcij z nevronske mreže. Light (1992) in Powell (1987) pa so dokazali, da nekatere nevronske mreže, tudi RBFN, problem lahko rešijo tudi z interpolacijo. Podrobneje o tem govorimo v opisu enačbe (9).

Oceno kakovosti učenja določimo z izračunom napake (angl. *error function*) na nizu učnih podatkov  $n$ , medtem ko ustreznost uporabe aproksimacijske funkcije preverimo na nizu testnih podatkov  $N$ . Pogostokrat v izračunih uporabimo funkcijo (Zainuddin in Pauline, 2008):

$$E(f) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2, \quad (3)$$

kjer je  $y_i$  dejanska vrednost izhodnega nevrona in  $f(x_i)$  z nevronske mreže izračunana vrednost. Določitev strukture in učenja umetne nevronske mreže poteka podobno kot pri drugih metodah. Cilj je določiti

najmanjšo napako aproksimacije na nizu učnih/testnih podatkov. Velikokrat uporabljajo tudi druge funkcije izračuna napake (razdelek 3).

Najprej so poizkušali probleme reševati z nevronske mrežo z več skritimi sloji nevronov (Rumelhart et al., 1986). Kasneje so Cybenko (1989) ter Hornik et al. (1989) pokazali, da obstaja nevronska mreža z le enim skritim slojem nevronov, ki je zmožna aproksimirati poljubno nelinearno funkcijo  $f$  z ustrežno natančnostjo. Nevronska mreža z enim skritim slojem nevronov ima prednost, da med učenjem ne zaide tako hitro v lokalni minimum, kot se to lahko zgodi pri večslojni nevronske mreži. Broomhead in Lowe (1988) sta pokazala, da lahko globalno aktivacijsko funkcijo, kot je na primer sigmoidna, nadomestimo z lokalizirano radialno bazno funkcijo v strukturi z enim skritim slojem in brez povratne povezave (slika 2). V tem primeru govorimo o nevronske mreži z radialnimi baznimi aktivacijskimi funkcijami RBFN (angl. *radial basis function network*). Velja poudariti, da bi radialne bazne funkcije lahko uporabili tudi pri večslojni nevronske mreži in povratni strukturi. Pri RBFN mreža od vhodnega sloja k skritemu sloju določi centre, ki pravzaprav predstavljajo uteži, in v drugem koraku uteži od skritega proti izhodnemu sloju. Večslojna nevronska mreža in mreža z radialnimi baznimi funkcijami brez povratne strukture se razlikujeta tudi v uporabi. Prvo uporabimo, ko imamo na voljo manj podatkov in želimo določiti globalno aproksimacijsko funkcijo. Drugo pa, ko imamo na voljo več podatkov in želimo s funkcijo predstaviti tudi lokalne značilnosti. Medtem ko so RBFN hitrejši pri učenju, so pri nadaljnji uporabi naučene strukture velikokrat počasnejše kot večslojne nevronske mreže.

Če primerjamo sigmoidno funkcijo, ki je velikokrat uporabljena v nevronske mreži z več kot enim skritim slojem, in Gaußovo funkcijo (uporabljena v RBFN) kot predstavnici različnih aktivacijskih funkcij, ima slednja bistvene prednosti. Glavna slabost sigmoidne funkcije je, da njeno definicijsko območje pokriva celotno območje vhodnih podatkov. Tako izboljšava uteži in ostalih parametrov med učenjem poteka z vsemi nevroni, zato je učenje dolgotrajno in lahko vključuje precej napak. Bolj učinkovita pri generalizaciji funkcij je nevronska mreža z radialnimi baznimi aktivacijskimi funkcijami, vendar le, ko imajo podatki lastnosti, ki bi jih predstavili z enostavnimi matematičnimi funkcijami (na primer z eksponentno). Pomanjkljivost nevronske mreže z Gaußovo aktivacijsko funkcijo se pokaže v obdelavi podatkov, katerih vrednosti se ne spreminjajo zvezno, ampak so med seboj zelo različne (oscilacije). Zato namesto Gaußove funkcije v skriti sloj vključujemo tudi druge radialne bazne funkcije, ki se bolje odzovejo na lokalno območje podatkov. To vpliva na določitev manjšega števila uteži kot pri nevronske mreži, ko so spremembi podvržene vse uteži. Sprememba števila uteži povzroči hitrejšo učenje nevronske mreže in boljše aproksimacijo.

## 2. 1 Nevronske mreže z radialnimi baznimi funkcijami

Pri nevronske mreži z radialnimi baznimi aktivacijskimi funkcijami rešujemo problem v prostoru višjih dimenzij, čeprav je v osnovi vezan na območje nižjih dimenzij. Ob tem nevronska mreža še vedno obdrži lastnost univerzalne aproksimacije (Park in Sandberg, 1991). Še več, glede na to, da problem prevedemo v večdimenzionalen prostor, je mreža sposobna reševati probleme tudi s podatki, ki so obremenjeni s šumom (Carozza in Rampone, 2001).

### 2.1.1 Radialne bazne funkcije

Radialna bazna funkcija, ki je zvezna funkcija v prostoru  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ , je odvisna od razdalje med  $x \in \mathbb{R}^m$  in dano točko  $x_j \in \mathbb{R}^m$ , kar zapišemo kot:

$$\phi(x) = \phi(\|x - x_j\|). \tag{4}$$

V skritem sloju RBFN za aktivacijske funkcije lahko uporabimo različne bazne funkcije (preglednica 1), vendar je najbolj pogosto v uporabi Gaußova. Predvsem zato, ker ima lokalne lastnosti, kar pomeni, da spremembe parametrov nekega nevrona ne vplivajo bistveno na vrednosti, ki so zelo oddaljene od centra tega nevrona:

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \phi(\|x - x_j\|) = 0 \tag{5}$$

V preglednici 1 podajamo matematične izraze za nekatere radialne bazne funkcije, ki jih lahko uporabimo v vmesnem sloju nevronske mreže (Buchmann, 2003). Pri tem z  $r$  označimo Evklidsko razdaljo med katerim koli parom točk v prostoru  $\Omega$ :  $r = \|x - x_j\|$ .

Preglednica 1: Matematični izrazi za radialne bazne funkcije. Parameter  $\sigma > 0$  določa širino funkcije (Fornberg in Flyer, 2014).

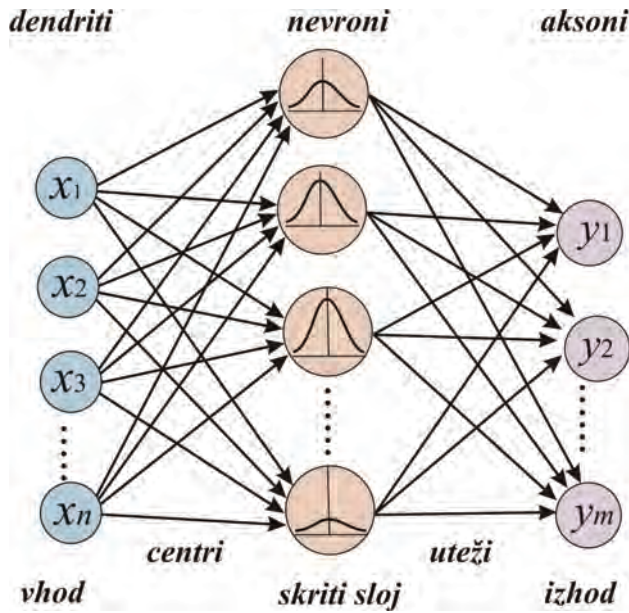
Gaußova funkcija	$\phi(r) = \exp\left(-\frac{r}{2\sigma^2}\right)$
multikvadratično (angl. <i>multi-quadric</i> )	$\phi(r) = \sqrt{r^2 + \sigma^2}$
inverzno kvadratično (angl. <i>inverse quadratic</i> )	$\phi(r) = \frac{1}{\sigma^2 + r^2}$
inverzno multikvadratično (angl. <i>inverse multi-quadric</i> )	$\phi(r) = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + r^2}}$ <span style="float: right;">(6)</span>
poliharmonični zlepek	$\phi(r) = r^k, k = 1, 3, 5, \dots$
	$\phi(r) = r^k \ln(r), k = 2, 4, 6, \dots$
tanek gladek zlepek (angl. <i>thin-plate spline</i> )	$\phi(r) = r^2 \ln(r)$

### 2.1.2 Nevronske mreže z radialnimi baznimi funkcijami

Nevronska mreža z radialnimi baznimi aktivacijskimi funkcijami je v obliki, ki sta jo predstavila Broomhead in Lowe (1988), vezana na trislojno strukturo. Vhodni sloj ima toliko nevronov, kot je vhodnih podatkov, skriti (vmesni) sloj ima  $h$  nevronov. Število nevronov skritega sloja lahko določimo vnaprej oziroma ga med učenjem spreminjamo. Nevroni skritega sloja pri radialni nevronske mreži delujejo nekoliko drugače kot pri nevronskih mrežah s sigmoidno aktivacijsko funkcijo. Vsak nevron skritega sloja izračuna Evklidsko razdaljo med vektorjema  $\mathbf{x}$  in  $\mathbf{x}_j$ . V danem primeru še ne govorimo o utežeh med vhodnim in skritim slojem, kot to velja pri običajnih strukturah umetnih nevronskih mrež. Pojem uteži tokrat privzamejo centri ali središča aktivacijske funkcije ( $\mathbf{x}_j = \mathbf{c}_j$ ). Pri nevronskih mrežah z radialnimi baznimi funkcijami načeloma o utežeh govorimo le pri povezavah med skritim in izhodnim slojem nevronov. Aktivacijska funkcija  $\phi$  ima nalogo preračunati razdaljo med vhodnim vektorjem  $\mathbf{x}$  in vektorjem posameznega nevrona  $\mathbf{x}_j$  v aktivacijo. Manjša je razdalja, večja je aktivacija. Tako nevronska mreža pridobi vrednost, ki jo uporabi naprej za izračun vrednosti nevronov izhodnega sloja  $\mathbf{y}$  in je linearna kombinacija vrednosti nevronov skritega sloja. Optimizacija strukture nevronske mreže temelji na



izboru ustreznega števila nevronov skritega sloja in določitvi primernih vrednosti vektorjev  $\mathbf{x}_j$  ali  $\mathbf{c}_k$ , ki so vključeni v nevrone.



Slika 2: Struktura nevronske mreže z radialnimi baznimi funkcijami.

Vsak nevron ima svoj center in radij, ki se med nevroni razlikujeta. Velja pravilo, da nevroni z večjim radijem bolj vplivajo na spremembo vrednosti funkcije na večjih razdaljah kot nevroni z manjšim radijem.

Za aktivacijsko funkcijo v skritem sloju niso primerne vse radialne bazne funkcije. Najbolj pomembno je, da jih lahko matematično eksplicitno predstavimo. Nadalje iz sistema normalnih enačb določimo vrednosti uteži  $w_1, \dots, w_n$ :

$$\begin{aligned} w_1 \cdot \phi(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1\|) + \dots + w_n \cdot \phi(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_n\|) &= y_1 \\ w_1 \cdot \phi(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|) + \dots + w_n \cdot \phi(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_n\|) &= y_2 \\ \vdots & \\ w_1 \cdot \phi(\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_1\|) + \dots + w_n \cdot \phi(\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_n\|) &= y_n \end{aligned} \quad (7)$$

Dokler velja  $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_j$  za  $i \neq j$ , bo matrika za izračun uteži, velikosti  $n \times n$ , obrnljiva. Povedano drugače, mogoča bo interpolacija:

$$f(\mathbf{x}) = w_1 \cdot \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|) + \dots + w_n \cdot \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\|). \quad (8)$$

V enačbi (8) lahko uporabimo manj centrov, kot je vhodnih podatkov  $k < n$  (to je:  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k$ ), da pridobimo bolj enostavno funkcijo:

$$f(\mathbf{x}) = w_1 \cdot \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_1\|) + \dots + w_n \cdot \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_k\|). \quad (9)$$

Paziti je treba, da določimo optimalno število in vrednosti centrov. Z manjšim številom centrov, kot je vhodnih nevronov, nadalje zapišemo preslikovanje vhodnih podatkov v izhodne kot:

$$\phi \begin{pmatrix} \|\mathbf{x} - \mathbf{c}_1\| \\ \|\mathbf{x} - \mathbf{c}_2\| \\ \vdots \\ \|\mathbf{x} - \mathbf{c}_k\| \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \phi \|\mathbf{x} - \mathbf{c}_1\| \\ \phi \|\mathbf{x} - \mathbf{c}_2\| \\ \vdots \\ \phi \|\mathbf{x} - \mathbf{c}_k\| \end{bmatrix} \cdot \mathbf{W} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \quad (10)$$

### 2.1.3 Določitev centrov in uteži v RBFN

Določitev strukture RBFN poteka v dveh korakih. Najprej določimo centre in velikosti vplivnega območja (radija) posameznega nevrona skritega sloja, zatem izračunamo uteži.

Določitev centrov lahko poteka povsem naključno, vendar je veliko bolje, da vhodne podatke razdelimo v skupine, ki jim priredimo centre. Velikost območja, na katero ima posamezni nevron še vpliv, določimo z razdaljo podatkov posamezne skupine od centra. Razdelitev podatkov v skupine, imenovano grozdenje, poteka s tehniko nenadzorovanega združevanja podatkov v skupine (grozde), ki imajo skupne značilnosti. Velikokrat pri RBFN za ta namen uporabimo algoritem *K-means* (MacQueen, 1967). Algoritem *K-means* podatke razdeli v skupine in skupini priredi središče oziroma center. Ko so centri določeni, jih v nadaljevanju učenja z RBFN ne spreminjamo več, ampak spreminjamo le vplivno območje (radij) in uteži nevronske mreže.

Ker so izhodi linearni, uteži določimo z reševanjem enačbe (11). To pomeni, da nevronska mreža lahko privzame nepovratno strukturo. Učenje je vsak vhodno-izhodni par poteka po postopku določitve linearnih enačb (enačba 8), ki jih rešimo z metodo najmanjših kvadratov.

Če enačbo (10) poenostavimo, dobimo:

$$\Phi \cdot \mathbf{W} = \mathbf{Y} \quad (11)$$

kjer velja:

$$\Phi_{i,j} = \phi \|\mathbf{x}_j - \mathbf{c}_i\| \quad (12)$$

$\Phi$  je izhodna matrika skritega sloja nevronov, pri čemer je  $i$ -ti stolpec matrike  $\Phi$  pravzaprav  $i$ -ti nevron skritega sloja. Večinoma je število nevronov skritega sloja manjše od števila vhodnih podatkov. To pomeni, da je  $\Phi$  navadno pravokotna in lahko zato za določitev uteži uporabimo postopek metode najmanjših kvadratov, kjer minimiziramo kvadratno formo  $E(f) = \|\Phi\mathbf{W} - \mathbf{Y}\|^2$ . Na podlagi metode najmanjših kvadratov določimo uteži kot:

$$\mathbf{W} = \Phi^+ \mathbf{Y}, \quad \Phi^+ = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \quad (13)$$

Ko je matrika  $\Phi$  regularna, obstaja samo en vektor  $\mathbf{W}$ , ki reši enačbo (11). Rešitev je torej vedno enolična. Če je  $\Phi$  singularna, ne moremo enolično določiti uteži. Rešitev temelji na najmanjši izračunani normi vseh možnih rešitev po metodi najmanjših kvadratov. V tem primeru za linearni sistem  $\mathbf{Y} = \Phi \cdot \mathbf{W}$  velja, da ob poznanem vektorju  $\mathbf{Y}$  neskončno mnogo različnih uteži  $\mathbf{W}$  reši problem. Do posamezne (partikularne) rešitve pridemo z uporabo ustrezne generalizirane inverzije  $(\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T$ . Če uporabimo psevdoinverzijo  $(\Phi^T \Phi)^+ \Phi^T$ , ima vektor  $\mathbf{W} = (\Phi^T \Phi)^+ \Phi^T \mathbf{Y}$  lastnost, da ima najmanjšo normo. Tudi norma diagonalnih elementov matrike  $(\Phi^T \Phi)^+$  je najmanjša možna.



Manjša kot je norma za uteži, boljše aproksimacijo funkcije lahko dosežemo z uporabo konkretne strukture nevronske mreže. Pri tem je pomembno vedeti, da pri nevronske mreži z enim skritim slojem pri nadzorovanem učenju vhodnih vrednosti uteži ni treba prilagajati, ampak jih lahko izberemo poljubno. To pomeni, da v danem primeru pri nadzorovanem učenju izhodne vrednosti uteži obravnavamo kot rešitev linearnega sistema enačb, ki ima analitično rešitev ob predpostavki, da nevroni skritega sloja vključujejo eksplicitno izražene funkcije, ki so zvezno odvedljive (Huang, 1999). Te trditve ponujajo najbolj enostavno, najhitrejšo in najbolj učinkovito možnost učenja nevronske mreže z enim skritim slojem nevronov.

**2.1.3.1 Dodatna izboljšava učenja RBFN**

Še boljše rešitev so pokazali Chen et al. (1991) in Zhao in Huang (2002), ki so določitev uteži povezali s postopkom optimalnega izbora števila nevronov skritega sloja. Tu zaporedno dodajamo nove centre in posledično nevrone, računamo napako ter postopek ustavimo, ko je napaka aproksimacije manjša od dopustne. Postopek lahko opišemo s koraki:

1. začnemo z  $n$  kandidati za centre, pri čemer prvega še nismo izbrali ( $M = 0$ );
2. za vse preostale kandidate za centre  $p = n - M$  ravnamo takole:  $p$ -ti center dodamo že izbranim centrom  $M$ , izračunamo uteži (enačba 13) in nazadnje napako aproksimacije (enačba 3) ;
3. izberemo center z najmanjšo napako aproksimacije in povečamo:  $M = M + 1$ ;
4. ponovimo vse od točke 2.

Ker moramo z vsakim na novo dodanim nevronom ponovno izračunati uteži, je postopek zamuden. Chen et al. (1991) so predlagali, da centre izbiramo iz niza ortogonalnih vektorjev iz matrike  $\Phi$ . Tako se izognemo večkratnemu izračunu uteži, ker je produkt  $\Phi^T \Phi$  diagonalna matrika. Določitev uteži v vsaki novi strukturi še vedno poteka s psevdoinverzijo (enačba (13)), vendar je zaradi ohranjanja ortogonalnosti centrov eden od najhitrejših načinov učenja.

**3 UPORABLJENE METODE Z DANIMI PODATKI**

V prispevku prikazujemo prednosti uporabe nevronske mreže z radialnimi baznimi aktivacijskimi funkcijami pri določitvi zveznih funkcij iz diskretnih podatkov. Grafično in numerično predstavljamo razlike v delovanju nevronske mreže, če v skritem sloju uporabimo različne aktivacijske funkcije.

**3.1 Ocena kakovosti aproksimacije**

Pri oceni kakovosti aproksimacije zvezne ploskve s posamezno strukturo nevronske mreže bomo določili:

1. oceno aproksimacije na primeru učnih vhodno-izhodnih parih podatkov, kar je vezano na oceno uspešnosti učenja, in
2. oceno aproksimacije na primeru testnih podatkov, ki jih nismo vključili v učenje, kar je vezano na oceno uporabnosti aproksimacijske funkcije.

Pri tem bomo določili normirano napako aproksimacije  $E(f)$ :

$$E(f) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - f(x_i))^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}}, \tag{14}$$

kjer je  $\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$ . Koren srednjega kvadratnega odstopanja (angl. *root mean squared error*) izračunamo kot:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2} \quad (15)$$

Dodatno bomo predstavili največje in najmanjše odstopanje aproksimirane vrednosti funkcije na primeru testnih podatkov. Pri učnem nizu nimamo težav, ker je učenje vezano na določitev najmanjšega odstopanja v aproksimaciji.

### 3.2 Struktura nevronske mreže za obravnavani primer

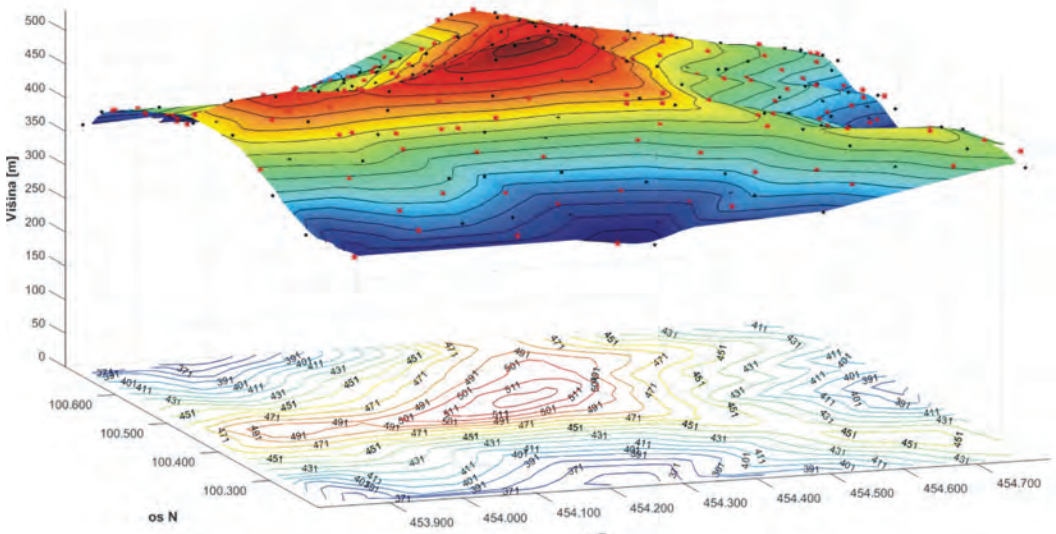
V dani situaciji imamo dva vhoda v nevronske mrežo in en izhod. Vsak vhod je vezan na eno položajno komponento horizontalnega položaja v koordinatnem sistemu D96/TM ( $x_i \rightarrow e, n$ ). Izhod vključuje podatek o višini ( $y_i \rightarrow H$ ). Cilj učenja je iz diskretnih podatkov pridobiti model višinske ploskve, iz katerega bo v poljubni točki mogoče določiti višino z ustrezno natančnostjo.

Nevronska mreža deluje po naslednjih korakih:

1. vzpostavitev začetnih vrednosti aktivacijske funkcije,
2. izračun produkta vmesnega sloja nevronske mreže (enačba 10),
3. določitev matrike uteži (enačba 13) oziroma,
4. določitev izhodnih vrednosti RBFN (enačba 11),
5. ocena, ali je aproksimacija za vse razpoložljive podatke v zelenih mejah (enačba 3), pri čemer predhodno določimo dopustno odstopanje. Če ne ustreza zahtevanemu, program usmerimo nazaj v drugi korak, kjer dodamo nevronske skrite sloje nevronske mreže (enačba 10). Tu velja omeniti, da tako tudi tvegamo, da bo mreža prenaučena.

### 3.3 Testiranje učinkovitosti aproksimacije z različnimi aktivacijskimi funkcijami

V danem primeru imamo na obravnavanem območju na voljo 1399 vhodno-izhodnih parov podatkov. Gre za koordinate točk v koordinatnem sistemu D96/TM z danimi nadmorskimi višinami (slika 3), ki smo jih privzeli naključno iz digitalnega modela višin DMV 5. Podatke iz digitalnega modela višin smo pridobili le zato, da smo lahko pokazali primernost uporabe posamezne metode na razgibanem območju, medtem ko bi v nadaljevanju potek terena lahko prikazali na podlagi veliko več podatkov. Višina najnižje točke obravnavanega primera znaša 299,965 m in najvišje 378,426 m. Čeprav ocene kakovosti določitve višin iz DMV 5 nismo naredili, smo v izračun privzeli vrednosti, da bi lahko primerjali kakovost aproksimacije z različnimi metodami. Različne nevronske mreže smo testirali na enakih učnih in testnih parih podatkov, pri čemer smo nevronske mreže učili na 874 učnih parih, medtem ko smo na preostalih 525 podatkih testirali učinkovitost aproksimacije. Nadalje smo rezultate učenja primerjali z rezultati modeliranja ploskev z metodo *kriging*. Primerjavo smo naredili v poljubno izbranih točkah na ploskvi, za katere smo poznali višine, vendar jih nismo uporabili za modeliranje. V učenje nevronske mreže smo vključili različno število podatkov tudi zato, da smo pokazali prednosti aproksimacije ploskve, ko na posameznih območjih nimamo dovolj podatkov.



Slika 3: Obravnavano območje. Poljubno razporejeni podatki so predstavljeni točkovno. Učni podatki so na ploskvi označeni z belimi krogi, s črnimi kvadrati so označeni testni podatki.

V danem primeru smo v program vgradili možnost uporabe Gaußove, multikvadratične, inverzne kvadratične in inverzne multikvadratične funkcije ter poliharmoničnega zleпка. Uspešnost učenja smo preverili na testnih podatkih, kjer smo ocenili:

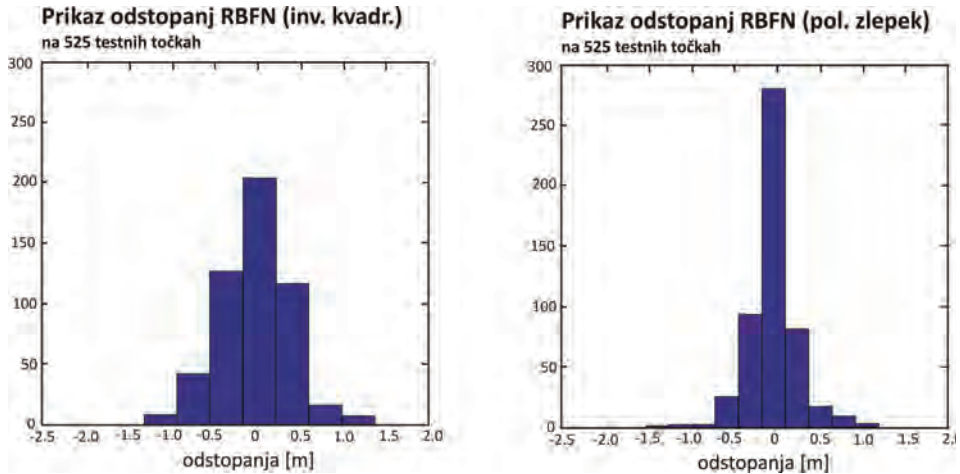
- najmanjše odstopanje od danih testnih vrednosti  $\delta_{min} = \min (y - f(x))$ ;
- največje odstopanje na danih testnih vrednostih  $\delta_{max} = \max (y - f(x))$ ;
- sredino odstopanja  $\bar{\delta} = \sum_{i=1}^n \delta_i / N$ , kjer je  $N$  število testnih podatkov;
- koren srednjega kvadratnega odstopanja  $RMSE$ .

Preglednica 2: Razlika med testnimi podatki in podatki, pridobljenimi z nevronskimi mrežami, ki vključujejo različne aktivacijske funkcije. V vsakem učenju smo uporabili enake učne in testne podatke.

	Gaußova funkcija	Multikvadratična funkcija	Inverzna kvadratična funkcija	Inverzna multikvadratična f.	Poliharmonični zlepek
$\delta_{min} [m]$	-50,189	-2,348	-2,072	-2,066	-1,113
$\delta_{max} [m]$	35,257	2,003	1,328	1,773	0,904
$\bar{\delta} [m]$	-0,324	-0,011	-0,016	-0,013	-0,008
$RMSE [m]$	4,663	0,523	0,387	0,447	0,204

V danem prispevku smo se omejili na uporabo manjšega števila podatkov za učenje nevronske mreže zato, da bi pokazali večjo oziroma manjšo učinkovitost aproksimacije z različno strukturo nevronske mreže. Treba je poudariti, da bi manjšo razliko med aproksimiranimi in danimi vrednostmi lahko določili, če bi imeli več vhodno-izhodnih parov podatkov. Številu podatkov nismo posvečali večje pozornosti, ker smo ugotavljali, katera radialna bazna funkcija je v danem primeru najboljša izbira za aktivacijsko funkcijo. Ker veliko programskih paketov v povezavi z RBFN vključuje le Gaußovo radialno funkcijo (tudi v MATLAB vgrajena funkcija), bi v danem primeru lahko rekli, da RBFN niso primerna izbira za

aproximacijo ploskve, saj so odstopanja na testnih podatkih prevelika (50 m, preglednica 2). Če pojem RBFN razširimo na uporabo različnih aktivacijskih funkcij, kot smo jih uporabili tudi mi, vidimo, da so RBFN zelo učinkovite pri aproksimaciji višinske ploskve. Iz rezultatov učenja in nadaljnjega testiranja, ki so predstavljeni v preglednici 2, vidimo, da je bila v danem primeru najboljša za aktivacijsko funkcijo izbira poliharmoničnega zleпка. V tem primeru se izračunane višine od dejanskih podatkov, ki niso bili vključeni v fazo učenja, razlikujejo le za približno en meter. Na sliki 4 prikazujemo histogram odstopanj na testnih podatkih za primer, ko smo v RBFN uporabili različni aktivacijski funkciji. Videti je, da so odstopanja najmanjša in najboljše razporejena pri izboru poliharmoničnega zleпка (desna slika).



Slika 4: Histogram odstopanj na testnih podatkih za RBFN, ko smo uporabili inverzno multikvadratno aktivacijsko funkcijo (levo) in poliharmonični zlepek (desno).

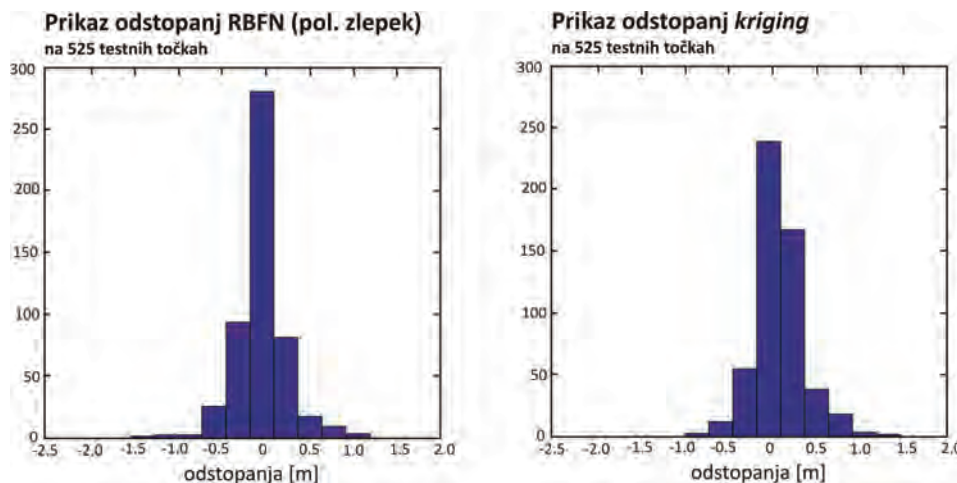
Želeli smo preveriti tudi učinkovitost aproksimacije z RBFN glede na ostale metode. Kot izhodišče za primerjavo smo uporabili stohastično metodo *kriging* in postopek linearne interpolacije, kjer smo ploskev, enako kot pri RBFN, določili na podlagi učnih podatkov, testni podatki pa so se uporabljali za določitev kakovosti modeliranja. Za analizo učinkovitosti modeliranja smo uporabili točke, ki so bile le znotraj območja danih podatkov.

Preglednica 3: Razlika med testnimi podatki in podatki, pridobljenimi z linearno interpolacijo in *krigingom* – računano le znotraj robov definicijskega območja podatkov.

	Linearna interpolacija	<i>Kriging</i>
$\delta_{min}$ [m]	-2,480	-1,643
$\delta_{max}$ [m]	3,488	1,110
$\bar{\delta}$ [m]	0,001	-0,015
<i>RMSE</i> [m]	0,523	0,311

Izračuni (preglednici 2 in 3) so na danem primeru podatkov pokazali prednost uporabe nevronske mreže pred drugimi metodami. Največje odstopanje z RBFN modeliranih od danih vrednosti v absolutnem smislu znaša približno en meter. Rezultati uporabe radialne nevronske mreže s poliharmoničnim zleptom za aktivacijsko funkcijo (6. stolpec v preglednici 2) so zelo podobni rezultatom *kriginga* (3. stolpec v

preglednici 3). Histogram odstopanj na testnih podatkih za RBFN s poliharmoničnim zlepkom in za metodo *kriging* prikazujemo na sliki 5. Porazdelitev odstopanj je obkraj podobna, večina odstopanj je med  $-0,5$  in  $0,5$  metra.



Slika 5: Levo – histogram odstopanj na testnih podatkih za RBFN (poliharmonični zlepek); desno – histogram odstopanj za *kriging*.

#### 4 RAZPRAVA O REZULTATIH

Na podlagi pridobljenih rezultatov lahko rečemo, da je uporaba nevronske mreže z radialnimi baznimi funkcijami smiselna izbira aproksimacije za višinsko ploskev. Iz rezultatov v preglednici 2 je razvidno, da ni vsaka struktura nevronske mreže primerna za reševanje posameznega problema. V dani situaciji smo z nevronske mreže z Gaušovo aktivacijsko funkcijo dobili rezultate, na podlagi katerih smo lahko ugotovili, da RBFN niso primerne za uporabo. Šele nadaljnja analiza različnih uporab aktivacijskih funkcij je privedla do ocene primernosti uporabe RBFN. V našem primeru se je kot najbolj učinkovita izkazala uporaba poliharmoničnega zlepka za aktivacijsko funkcijo. Različni avtorji navajajo, da splošnega pravila, katero aktivacijsko funkcijo v posameznem primeru uporabiti, ni, zato je treba aproksimacijo z RBFN narediti z različnimi aktivacijskimi funkcijami. O povezavi med obliko vhodnih podatkov (na primer podatki z velikimi/manjšimi spremembami v vrednostih) in uporabo aktivacijske funkcije lahko le sklepamo, praktične rešitve še ne poznamo. Kakovost aproksimacije je še vedno pogojena s količino podatkov, ki jih imamo na voljo. Če bi na testnem območju določili več vhodno-izhodnih parov podatkov za učenje, bi bila tudi kakovost aproksimacije v smislu največjega/najmanjšega odstopanja boljša. Vendar se to praviloma nanaša na vse metode modeliranja ploskev. Tako pri uporabi RBFN kot pri drugih metodah je treba imeti na voljo tudi podatke, ki jih ne uporabimo za modeliranje, ampak jih uporabimo naknadno za oceno kakovosti modeliranja. V nadaljevanju bi bilo dobro preveriti delovanje nevronske mreže zunaj definicijskega območja danih podatkov in opredeliti kakovost aproksimacije še z drugimi metodami (na primer kolokacija po metodi najmanjših kvadratov).

## 5 SKLEP

V prispevku smo želeli prikazati lastnosti uporabe nevronske mreže z različnimi radialnimi baznimi aktivacijskimi funkcijami na praktičnem primeru aproksimacije višinske ploskve. Nevronske mreže v zadnjem času uporabljajo kot alternativo že znanim in preizkušenim metodam, in izkazale so se za učinkovito orodje, predvsem tam, kjer nimamo na voljo dovolj podatkov oziroma so ti obremenjeni s šumom. Pokazali smo, da je nevronska mreža, čeprav ne temelji na upoštevanju zaporednih matematičnih korakov modeliranja, primerno orodje za določitev zveznih funkcij, ki jih potrebujemo za grafične izrisi, izračun točk med diskretnimi podatki ali za nadaljnje računanje prostornin z določenim naborom podatkov.

Kljub dobri aproksimaciji v povezavi z RBFN še vedno ostajajo nerazrešena vprašanja. Naprej se navezujejo na izbor aktivacijske funkcije v skritem sloju. Tako kot navajajo drugi avtorji, smo tudi v danem primeru prišli do ugotovitve, da je najboljši izbor strukture nevronske mreže vezan na večkratno uporabo različnih nevronske mreže (z različnimi aktivacijskimi funkcijami) na istem nizu podatkov in na oceni, s katero strukturo pridobimo najboljše rezultate. Predvidevamo, da je izbor aktivacijske funkcije v skritem sloju odvisen tudi od podatkov, ki jih obdelujemo. Enako velja za predstavitev učinkovitosti nevronske mreže na primeru »problematičnih podatkov«, ki lokalno odstopajo od drugih podatkov.

Kakovost aproksimacije je zelo odvisna od izbora oziroma razdelitve podatkov na učne in testne. Če izbor delamo naključno, kar je navadno vezano na večje število podatkov, je dobro učenje ponoviti na različnih kombinacijah učnih in testnih podatkov, saj včasih razdelitev podatkov vodi do problematike neupoštevanja lokalnih značilnosti poteka ploskev. Izbor lahko naredimo tudi naključno ob predhodnem hitrem pregledu podatkov, kjer postavimo zahtevo, da pri večjih odstopanjih podatkov glede na prehodne vrednosti izberemo del podatkov, ki bo vedno vključen v skupino učnih podatkov.

Uporaba nevronske mreže z radialnimi baznimi funkcijami na danem primeru se je izkazala kot učinkovito orodje aproksimacije, ki ima zaradi nepovratne strukture prednosti v hitrosti učenja. V prihodnosti bi bilo morda smiselno učni algoritem povezati s še bolj kompleksnimi aktivacijskimi funkcijami in narediti analizo, katero aktivacijsko funkcijo uporabiti, ko imamo na voljo različno število in različno razporeditev diskretnih podatkov.

## Literatura in viri:

- Ambrožič, T., Kuhar, M., Stopar, B., Turk, G. (1999). Modeliranje lokalnega geoida z umetnimi nevronske mrežami. *Geodetski vestnik*, 43(2), 118–129.
- Broomhead, D. S., Lowe, D. (1988). Multivariable functional interpolation and adaptive networks. *Complex Systems* 2, 321–355. <https://www.complex-systems.com/pdf/02-3-5.pdf>, pridobljeno 15. 3. 2016.
- Buchmann, M. D. (2003). *Radial Basis Functions: Theory and Implementations*. Cambridge University Press. DOI: <http://dx.doi.org/10.1017/cbo9780511543241>
- Carozza, M., Rampone, S. (2001). An incremental multivariate regression method for function approximation from noisy data. *Pattern Recognition*, 34(3), 179–186. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.neunet.2005.07.008>
- Chen, S., Cowan, C. F. N., Grant, P. M. (1991). Orthogonal least squares algorithm for radial basis function networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2(2), 302–309. DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/72.80341>
- Cybenko, G. (1989). Approximation by superpositions of a sigmoidal function. *Mathematics of control Signals Systems* 2, 303–314. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/BF02134016>
- Derenda, I. (2007). *Aproksimacija višinske referenčne ploskve z nevronske mrežami*. Diplomsko delo. Ljubljana: Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo. [http://drug.fgg.uni-lj.si/834/3/GEU\\_0731\\_Derenda.pdf](http://drug.fgg.uni-lj.si/834/3/GEU_0731_Derenda.pdf), pridobljeno 29. 2. 2016.
- Fornberg, B., Flyer, N. (2014). *Solving PDEs with Radial Basis Functions*. [https://amath.colorado.edu/sites/default/files/2014/09/.../Paper\\_04.pdf](https://amath.colorado.edu/sites/default/files/2014/09/.../Paper_04.pdf), pridobljeno 29. 2. 2016.
- Hebb, D. O. (1949). *The Organization of Behavior*. Wiley, New York. DOI: [http://dx.doi.org/10.1002/1097-4679\(195007\)6:3<307::aid-jclp2270060338>3.0.co;2-k](http://dx.doi.org/10.1002/1097-4679(195007)6:3<307::aid-jclp2270060338>3.0.co;2-k)



Hopfield, J. J. (1982). Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proceedings of National Academy of Sciences USA*, 79(8), 2554–2558. DOI: <http://dx.doi.org/10.1073/pnas.79.8.2554>

Hornik, K., Stinchcombe, M., White, H. (1989). Multilayer feedforward networks are universal approximators. *Neural Networks*, 359–366. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0893-6080\(89\)90020-8](http://dx.doi.org/10.1016/0893-6080(89)90020-8)

Huang, D. S. (1999). Radial Basis Probabilistic Neural Networks: Model and Applications. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 13, 1083–1101. DOI: <http://dx.doi.org/10.1142/S0218001499000604>

Light, W. A., Cheney, W. W. (1992). Interpolation by periodic radial basis functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 168(1), 111–130. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0022-247x\(92\)90193-h](http://dx.doi.org/10.1016/0022-247x(92)90193-h)

Kosmatin-Fras, M. (2004). Vpliv kakovosti vhodnih podatkov na kakovost ortofota. *Geodetski vestnik*, 48(2). 167–178. [http://www.geodetski-vestnik.com/48/2/gv48-2\\_168-178.pdf](http://www.geodetski-vestnik.com/48/2/gv48-2_168-178.pdf), pridobljeno 15. 3. 2016.

McCulloch, W. S., Pitts, W. (1943). A Logical Calculus of the Ideas Immanent in Nervous Activity. *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 5, 115–133. Ponovni natis v Anderson & Rosenfeld, 1988, 18–28. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/bf02478259>

Pavlovčič Prešeren, P., Stopar, B. (2009). GPS orbit approximation using radial basis function networks. *Computers & Geosciences*, 35(7), 1389–1396. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cageo.2008.02.038>

Powell, M. (1987). Radial basis functions for multivariable interpolation. V: J. Mason, M. Cox (ur.) *Algorithms and Approximation*. Clarendon Press, Oxford.

Rosenblatt, F. (1958). The Perceptron: A Probabilistic Model for Information Storage and Organization in the Brain, Cornell Aeronautical Laboratory, *Psychological Review*, 65(6), 386–408. DOI: <http://dx.doi.org/10.1037/h0042519>

Rumelhart, D. E., Hinton, G. E., Williams, R. J. (1986). Learning internal representations by error propagation. V: *Readings in Cognitive Science*, 399–421. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/b978-1-4832-1446-7.50035-2>

Šumrada, R. (2005). *Strukture podatkov in prostorske analize*. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.

Zainuddin, Z., Pauline, O. (2008). Function approximation using artificial neural networks. *WSEAS Transactions on Mathematics*, 7(6), 333–338. <http://www.naun.org/main/UPress/saed/saed-23.pdf>, pridobljeno 10. 3. 2016.

Zhao, W. B., Huang, D. S. (2002). Application of Recursive orthogonal Least Squares Algorithm to The Structure Optimization of Radial Basis Probabilistic Neural networks. *ICSP*, 1211–1214. DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/icosp.2002.1180008>



Pavlovčič Prešeren P., Stopar B., Sterle O. (2016). Modeliranje 3D-ploskev z nevronskimi mrežami z radialnimi baznimi aktivacijskimi funkcijami. *Geodetski vestnik*, 60 (2): 241–255. DOI: 10.15292/geodetski-vestnik.2016.02.241-255

**doc. dr. Polona Pavlovčič Prešeren, univ. dipl. inž. geod.**  
 Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo  
 Jamova cesta 2, SI-1000 Ljubljana  
 e-naslov: polona.pavlovic@fgg.uni-lj.si

**asist. dr. Oskar Sterle, univ. dipl. inž. geod.**  
 Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo  
 Jamova cesta 2, SI-1000 Ljubljana  
 e-naslov: oskar.sterle@fgg.uni-lj.si

**prof. dr. Bojan Stopar, univ. dipl. inž. geod.**  
 Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo  
 Jamova cesta 2, SI-1000 Ljubljana  
 e-naslov: bojan.stopar@fgg.uni-lj.si